Magistère d'Informatique et Modélisation

Partiel de Logique

27 novembre 1998

Exercice 1

On se place dans le système de la déduction naturelle.

1. Soit $\Gamma = \{\varphi \to \psi, \neg(\neg\varphi \vee \psi)\}$. Démontrez
   (a) que $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi$
   (b) et que $\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \psi$.
2. Démontrez :
   (a) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to \varphi \to \psi$
   (b) et $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$.
3. Quel système avez-vous utilisé dans chaque cas ?
4. Si vous avez utilisé un système non intuitionniste dans la question 2, justifiez votre choix en exhibant un modèle de Kripke qui ne modélise pas la proposition en question.
5. Prouvez $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$ en utilisant comme dernière règle une élimination de $\vee$, c-a-d $(\vee E)$, sur la proposition $\neg\varphi \vee \varphi$.

Exercice 2

On définit une récurrence (induction) sur les entiers naturels en la fondant sur la démonstration du fait qu'une propriété est vraie pour la somme de deux nombres si elle est vraie pour chacun de ces nombres. Énoncez cette règle de récurrence comme un axiome du second ordre.