Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé de l'examen final de Logique

du 18 mai 1998

Exercice 3

Question 1

La proposition $\psi_1 = (B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ est prouvable en logique classique, donc la proposition $\psi_2 = (K_i\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow ((\neg K_i\neg\varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\varphi)))$ obtenue en remplaçant, dans ψ_1, A par $\neg\varphi$, B par $K_i\neg\varphi$ et C par $K_i(\neg K_i\neg\varphi)$ est aussi prouvable en logique classique. D'où l'arbre de preuve.

$$\dfrac{\vdash \neg K_i\neg\varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\varphi) \quad (\mathbf{A5}) \qquad \dfrac{\vdash K_i\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi \quad (\mathbf{A3}) \qquad \vdash \psi_2 \quad (\mathbf{A1})}{\vdash (\neg K_i\neg\varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\varphi))}}{\vdash \varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\varphi)}$$

Commentaire : en logique modale on ne peut pas utiliser la règle de déduction « *De* $\Gamma, \varphi \vdash \psi$*, je déduis* $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ », dite aussi règle d'introduction de $\Rightarrow$; cette règle n'était d'ailleurs pas mentionnée dans l'énoncé. Si c'était le cas, alors du jugement $\varphi \vdash K_i\varphi$, donc $\varphi \models K_i\varphi$, c'est-à-dire « *Si dans tous les mondes* φ *est vrai, alors chaque agent* i *sait* φ », on pourrait déduire $\vdash \varphi \Rightarrow K_i\varphi$, c'est-à-dire « *Si* φ *est vrai, alors chaque agent* i *sait* φ ».

Question 2

Dans ce qui suit, $\mathcal{M}$ est un modèle quelconque $(U_\mathcal{M}, k_1, ..., k_i, \mathcal{I}_\mathcal{M})$, où les k_i sont des relations quelconques (pas forcément symétriques).

On instancie φ par χ_s. Si $\models \chi_s \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\chi_s)$ alors $\mathcal{M} \models \chi_s \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\chi_s)$. Donc pour tout $s \in U_\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, s \Vdash \chi_s \Rightarrow K_i(\neg K_i\neg\chi_s)$. Donc si $\mathcal{M}, s \Vdash \chi_s$ alors $\mathcal{M}, s \Vdash K_i(\neg K_i\neg\chi_s)$. Or, $\mathcal{M}, s \Vdash K_i(\neg K_i\neg\chi_s)$ signifie que pour tout $t \in U_\mathcal{M}$ tel que $s\ k_i\ t$, $\mathcal{M}, t \Vdash \neg K_i\neg\chi_s$.

$\mathcal{M}, t \Vdash \neg K_i\neg\chi_s$ signifie qu'il existe $u \in U_\mathcal{M}$ tel que $t\ k_i\ u$ et $\mathcal{M}, u \Vdash \neg\chi_s$ (autrement dit $\mathcal{M}, u \Vdash \chi_s$ ou encore $u = s$), donc $\mathcal{M}, t \Vdash \neg K_i\neg\chi_s$ signifie que $t\ k_i\ s$.

En résumé, pour tout $s \in U_\mathcal{M}$, puisque $\mathcal{M}, s \Vdash \chi_s$ est un fait, alors, pour tout $t \in U_\mathcal{M}$ tel $s\ k_i\ t$, on a $t\ k_i\ s$ ce qui est la symétrie de k_i.

Exercice 4

Question 1

$H1 \equiv \forall x \exists y(\neg A(x) \vee B(x, y))$
$H2 \equiv \forall x \forall y(\neg B(x, y) \vee B(f(x), g(y)))$
$H3 \equiv \forall x \forall y(\neg B(f(f(x)), y) \vee \neg A(x) \vee C(y))$
$\neg G \equiv (\forall x \neg C(x)) \wedge \neg(\forall x \neg A(x)) \equiv (\forall x \neg C(x)) \wedge (\exists y A(y))$

Question 2

$H2$ et $H3$ sont sous forme de Skolem.
$H1$ est équisatisfiable à $\forall x(\neg A(x) \vee B(x, h(x)))$.
$\neg G$ est équisatisfiable à $\forall x \neg C(x)), A(a)$ où a est un constante de Skolem.

Question 3

Les clauses à considérer sont, au renommage des variables liées près :

1. $\neg A(x) \vee B(x, h(x))$
2. $B(y, z) \vee B(f(y), g(z))$

3. $\neg B(f(f(t)), u) \vee \neg A(t) \vee C(u))$
4. $\neg C(v)$
5. $A(a)$

La résolution donne

6. $\neg B(f(f(t)), u) \vee \neg A(t)$ de 3 et 4,

7. $\neg B(f(y), z) \vee B(f(f(y)), g(z))$ comme instance de 2,

8. $\neg B(f(y), z) \vee \neg A(y)$ de 6 et 7,

9. $\neg B(f(a), z)$ de 5 et 8,

10. $B(a, h(a))$ de 1 et 5,

11. $B(f(a), g(h(a)))$ de 2 et 10,

12. $\square$ (c'est-à-dire clause vide) de 9 et 11.