Magistère d'Informatique et Modélisation

Devoir de Logique

À remettre le xx mars 199 ?

Le but de ce devoir est de montrer la complétude du calcul propositionnel intuitionniste vis-à-vis des modèles de Kripke. Sans beaucoup nuire à la généralité, on se restreindra à un calcul ne contenant que les connecteurs $\vee$ et $\Rightarrow$.

Partie 1

Dans cette partie on montre que pour le calcul propositionnel intuitionniste, la validité dans les modèles de Kripke infinis se ramène à la validité dans les modèles de Kripke finis.

L'ensemble des propositions est noté PROP et l'ensemble des variables propositionnelles est noté Var. Un modèle de Kripke du calcul propositionnel est un triplet $\mathcal{K} = (U, \leq, \mathcal{I})$, où U est un ensemble fini ou infini, $\leq$ est un ordre sur U et $\mathcal{I} : Var \to \mathcal{P}(U)$ est tel que pour chaque variable propositionnelle $p \in Var$, $\mathcal{I}(p)$ est un sous-ensemble dirigé de U, c'est-à-dire tel que $u \in \mathcal{I}(p)$ et $u \leq v$ impliquent $v \in \mathcal{I}(p)$. On définit une relation $\Vdash_{\mathcal{K}}$ (ou plus simplement $\Vdash$) sur $U \times \mathsf{PROP}$ par induction sur la structure des propositions :

- si la proposition est une variable propositionnelle p, alors $u \Vdash p$ signifie que $u \in \mathcal{I}(p)$,
- si la proposition est de la forme $\varphi \vee \psi$, alors $u \Vdash \varphi \vee \psi$, signifie que $u \Vdash \varphi$ ou $u \Vdash \psi$,
- si la proposition est de la forme $\varphi \Rightarrow \psi$, alors $u \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ signifie que pour tout $v \geq u$ si $v \Vdash \varphi$ alors $v \Vdash \psi$.

φ est valide dans $\mathcal{K}$, ce qui s'écrit $\mathcal{K} \models \varphi$, ssi pour tout $u \in U$, $u \Vdash \varphi$ et φ est valide, ce qui s'écrit $\models \varphi$, ssi pour tout modèle $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models \varphi$.

Soient $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke et Γ un ensemble fini de propositions qui s'il contient une formule φ contient toutes les sous-formules de φ. Nous associons à $\mathcal{K}$ un modèle de Kripke fini $\mathcal{K}_\Gamma = (U_\Gamma, \leq_\Gamma, \mathcal{I}_\Gamma)$ comme suit. On définit, pour chaque $u \in U$, $[u] = \{\varphi \in \Gamma \mid u \Vdash \varphi\}$ et $U_\Gamma = \{[u] \mid u \in U\}$. L'ordre $\leq_\Gamma$ est l'ordre d'inclusion des sous-ensembles de PROP. On écrit $\Vdash_\Gamma$ au lieu de $\Vdash_{\mathcal{K}_\Gamma}$. Par définition $\mathcal{I}_\Gamma(p) = \{[u] \mid p \in [u]\}$. On dit que $\mathcal{K}_\Gamma$ est obtenu par *filtration* à partir de $\mathcal{K}$.

1. Montrez que $\mathcal{K}_\Gamma$ satisfait les critères de définition d'un modèle de Kripke.
2. Montrez que si $\varphi \in \Gamma$ les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $[u] \Vdash_\Gamma \varphi$
   (ii) $u \Vdash \varphi$
   (iii) $\varphi \in [u]$.
3. Montrez que U_Γ est fini.
4. Montrez que $\models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{K} \models \varphi$ pour tous les modèles $\mathcal{K}$ finis.

Partie 2

Dans la suite, on considère les modèles de Kripke finis ou infinis.

Un ensemble de propositions Δ est *premier* s'il satisfait les deux conditions :

a. si Δ est clos par $\vdash$,

b. quand $\varphi \vee \psi \in \Delta$ alors ou bien $\varphi \in \Delta$, ou bien $\psi \in \Delta$.

Soient Γ un ensemble de propositions et φ une proposition telle $\Gamma \nvdash \varphi$, on veut construire un ensemble Γ' premier qui contienne Γ et tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$. Pour cela, on ordonne les propositions disjonctives en une suite $(\psi_1 \vee \chi_1, ..., \psi_n \vee \chi_n, ...)$ et l'on construit la suite Γ_k ainsi. Γ_0 est Γ. Supposons construit Γ_k et considérons la première proposition de la suite ci-dessus qui n'a pas été considérée et qui est telle que $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$.

1. Expliquez pourquoi une telle proposition $\psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ existe toujours.
2. Montrez que l'on n'a pas à la fois $\Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi$ et $\Gamma_k, \chi_{n_k} \vdash \varphi$. Ainsi on définit

$$\Gamma_{k+1} := \begin{cases} \Gamma_k \cup \{\psi_{n_k}\} \text{ si } \Gamma_k, \psi_{n_k} \nvdash \varphi \\ \Gamma_k \cup \{\chi_{n_k}\} \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

   Enfin $\Gamma' = \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$.
3. Montrez que $\Gamma' \nvdash \varphi$.
4. Montrez que Γ' est premier.

Partie 3

Dans cette partie on veut montrer que si $\Gamma \nvdash \varphi$ alors il existe un modèle de Kripke $\mathcal{K} = (U, \leq, \mathcal{I})$ et une étape u minimum dans U telle que $u \Vdash \Gamma$ et $u \nVdash \varphi$. On construit tout d'abord un ensemble premier Γ' tel que $\Gamma' \supseteq \Gamma$ et $\Gamma' \nvdash \varphi$. U est l'ensemble des suites finies d'entiers ordonnées par l'ordre préfixe (ε est la suite vide).

1. On construit le modèle $\mathcal{K}$ et des ensembles $\Gamma(\alpha)$ associés à chaque suite d'entiers α (c'est-à-dire à chaque étape de U).
   - cas ε, $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma'$.
   - cas αi. Soit une suite $((\sigma_0, \tau_0), (\sigma_1, \tau_1), ..., (\sigma_n, \tau_n), ...)$ énumérant tous les (σ_i, τ_i) tels que $\Gamma(\alpha), \sigma_i \nvdash \tau_i$. On peut construire un ensemble premier $\Gamma(\alpha i)$ tel que $\sigma_i \in \Gamma(\alpha i)$ et $\Gamma(\alpha i) \nvdash \tau_i$. Pourquoi ? Par définition, $\alpha \in \mathcal{I}(p)$ si et seulement si $p \in \Gamma(\alpha)$.
2. Supposant que pour tout β, $\beta \Vdash \psi_1$ si et seulement si $\Gamma(\beta) \vdash \psi_1$ et $\beta \Vdash \psi_2$ si et seulement si $\Gamma(\beta) \vdash \psi_2$, montrez que $\alpha \Vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$ implique $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$.
3. Montrez que $\alpha \Vdash \psi$ si et seulement si $\Gamma(\alpha) \vdash \psi$.
4. Montrez que $\varepsilon \Vdash \psi$ (pour chaque $\psi \in \Gamma$) et que $\varepsilon \nVdash \varphi$.
5. Montrez que si $\models \varphi$ alors $\vdash \varphi$.