Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen Final de Logique

18 mai 1998

Documents autorisés : notes de cours, *Durée :* 2 heures.

Exercice 1

1. En utilisant la déduction naturelle montrez que :
   (a) $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$
   (b) $\vdash \neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$.
2. Avez-vous utilisé la déduction naturelle intuitionniste ? Pourquoi ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

1. En utilisant la déduction naturelle montrez que *si* $\Gamma \vdash \varphi[x := t]$ *alors* $\Gamma \vdash \neg(\forall x \neg\varphi)$.
2. Montrez que $\models \neg(\forall x \neg\varphi) \Leftrightarrow \exists x \varphi$.
3. En utilisant la question 1, énoncez une règle d'introduction de $\exists$.

Exercice 3

K_i pour $1 \leq i \leq n$ sont les modalités de la logique épistémique.

1. Montrez que $\vdash \varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i \neg\varphi)$ est prouvable à partir du *modus ponens* et de
   A1 si $\vdash_c \varphi$ (φ est prouvable en logique propositionnelle classique) alors $\vdash \varphi$,
   A3 $\vdash K_i\varphi \Rightarrow \varphi$.
   A5 $\vdash \neg K_i\varphi \Rightarrow K_i \neg K_i \varphi$.
2. Soit $\mathcal{M}$ un modèle tel que chaque monde est caractérisé par une proposition (c'est-à-dire tel que pour que chaque $s \in U_{\mathcal{M}}$, il existe une proposition χ_s telle que $\mathcal{M}, u \Vdash \chi_s$ si seulement si $u = s$). Montrez que si $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow K_i(\neg K_i \neg\varphi)$ alors la relation k_i dans $\mathcal{M}$ est symétrique.

Exercice 4

Étant donnés les deux fonctions unaires f et g, les prédicats unaires A et C et le prédicat binaire B, on considère les énoncés suivants :

H1 $\forall x(A(x) \Rightarrow \exists y B(x, y))$

H2 $\forall x \forall y(B(x, y) \Rightarrow B(f(x), g(y)))$

H3 $\forall x \forall y(B(f(f(x)), y) \Rightarrow (\neg A(x) \vee C(y)))$

G $(\forall x \neg C(x)) \Rightarrow (\forall x \neg A(x))$.

1. Mettez **H1**, **H2**, **H3** et $\neg$**G** sous forme prénexe normale conjonctive (la formule sans quantificateur est une conjonction de disjonctions).
2. Skolémisez les énoncés correspondants.
3. Déduisez-en par résolution que **G** est une conséquence de **H1**, **H2** et **H3**.