Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen final de logique

5 janvier 2004

Documents autorisés.
Dans les questions ouvertes, limitez votre réponse à au plus cinq lignes.

Exercice 1

1. Donner un terme du λ-calcul avec produit cartésien de type $(\sigma \times \tau) \times \rho \to \rho \times (\sigma \times \tau)$.
2. Typer le terme $M = \lambda x.\pi^1\ ((\lambda y.y)\ \langle x, x\rangle)$.
3. Réduire M. Quel est son type ?

Exercice 2

Dans ce qui suit, $\Gamma \vdash_I \varphi$ signifie que φ est déductible à partir de Γ en déduction naturelle *intuitionniste*, tandis que $\Gamma \vdash_K \varphi$ signifie que φ est déductible à partir de Γ en déduction naturelle *classique*.

D'autre part, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est une abréviation pour $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

1. Donner un modèle de Kripke $\mathcal{K}$ qui ne valide pas $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi)$.
2. Décrire une famille $\mathbf{F}$ de modèles de Kripke décrits seulement par leur relation d'accessibilité qui valident $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi)$.
3. Donner un modèle de Kripke $\mathcal{K}'$ qui ne valide pas $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \rho) \vee (\rho \Rightarrow \varphi)$.
4. Décrire une famille $\mathbf{F}'$ de modèles de Kripke décrits seulement par leur relation d'accessibilité et différente de $\mathbf{F}$, qui valident $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \rho) \vee (\rho \Rightarrow \varphi)$.
5. Parmi la famille $\mathbf{F}$ et la famille $\mathbf{F}'$, y en a-t-il une contient l'autre ?
6. Considérons la logique J obtenue en ajoutant à la logique intuitionniste l'axiome $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi)$. Montrer que $\vdash_J (\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \rho) \vee (\rho \Rightarrow \varphi)$.
7. Montrer que si $\Gamma \vdash_I \varphi$ et $\Gamma, \varphi \vdash_I \psi$ alors $\Gamma \vdash_I \psi$. La règle dérivée

$$\frac{\Gamma \vdash_I \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash_I \psi}{\Gamma \vdash_I \psi}$$

qui découle de ce résultat est appelée *coupure*.
8. Montrer que $\vdash_I \neg\varphi \Leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$.
9. Montrer que $\vdash_I \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ et $\vdash_I \neg\neg\psi \Rightarrow \psi$ impliquent $\vdash_I \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.
10. Montrer que $\vdash_I \neg\neg\psi \Rightarrow \psi$ implique $\vdash_I \neg\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$.
11. Montrer que si φ est une proposition qui ne contient pas $\vee$ et où chaque variable propositionnelle est précédée d'une négation, alors $\varphi \Leftrightarrow \neg\neg\varphi$.
12. Considérons l'application dite *traduction de Gödel* qui à une proposition φ fait correspondre la proposition φ° ; elle est définie ainsi :
    - $\perp^\circ = \perp$,

– $p^\circ = \neg\neg p$ si p est une variable propositionnelle,
– $(\varphi \wedge \psi)^\circ = \varphi^\circ \wedge \psi^\circ$,
– $(\varphi \vee \psi)^\circ = \neg(\neg\varphi^\circ \wedge \neg\psi^\circ)$,
– $(\varphi \Rightarrow \psi)^\circ = \varphi^\circ \Rightarrow \psi^\circ$,

Soit π la loi de Pierce. Que vaut π° ? Donner un modèle de Kripke qui ne valide pas la loi de Pierce. Ce modèle valide-t-il π° ?

13. Calculer $((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow p))^\circ$.
Est-ce que le modèle $\mathcal{K}'$ de la question 3 valide $((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow p))^\circ$?
14. On définit Γ° par $\Gamma^\circ = \{\varphi^\circ \mid \varphi \in \Gamma\}$.
Montrer que $\Gamma \vdash_K \varphi$ si et seulement si $\Gamma^\circ \vdash_I \varphi^\circ$.
15. En déduire que $\vdash_K \varphi$ si et seulement si $\vdash_I \neg\neg\varphi$.

Exercice 3

Soit M un λ-terme. Soit $\mathcal{A}(M)$ un ensemble de redex de M. On écrit $M \xrightarrow{\mathcal{A}(M)} N$ si N est obtenu à partir de M en contractant un redex qui appartient à $\mathcal{A}(M)$.

1. On suppose que $\mathcal{V}(M)$ est constitué des redex de M de la forme $(\lambda x B)\ P$ où P est soit une abstraction, soit une variable. La réduction de M qui contracte à chaque étape les rédex de $\mathcal{V}(M)$ se note $\xrightarrow{\mathcal{V}}$. C'est-à-dire que $M_1 \xrightarrow{\mathcal{V}} M_2$ correspond à $M_1 \xrightarrow{\mathcal{V}(M_1)} M_2$.
Quelles sont les formes normales de $\xrightarrow{\mathcal{V}}$? Est-ce que $\xrightarrow{\mathcal{V}}$ est confluent ?
2. Déterminer un ensemble $\mathcal{P}(M)$ ayant la propriété suivante : si $M \xrightarrow{\mathcal{P}(M)} N$ et si N est fortement normalisable alors M est fortement normalisable autrement dit :

$$M \xrightarrow{\mathcal{P}(M)} N \Rightarrow N \in SN \Rightarrow M \in SN.$$