Licence d'Informatique fondamentale

Corrigé du partiel de programmation 2

2006-2007

Exercice 1

1.

$$\dfrac{(p \vee q), (p \Rightarrow q), p \vdash p \vee q \qquad \dfrac{(p \vee q), (p \Rightarrow q), p \vdash p \Rightarrow q \qquad (p \vee q), (p \Rightarrow q), p \vdash p}{(p \vee q), (p \Rightarrow q), p \vdash q} \Rightarrow E \qquad (p \vee q), (p \Rightarrow q), q \vdash q}{\dfrac{\dfrac{(p \vee q), (p \Rightarrow q) \vdash q}{(p \vee q) \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \Rightarrow I}{\vdash (p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q} \Rightarrow I}$$

2. Si $[\![p]\!] = 1$ ou $[\![q]\!] = 1$ alors $[\![p \vee q]\!] = 1$ d'où $[\![((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)]\!] = 1$.
   Si $[\![p]\!] = 0$ et $[\![q]\!] = 0$ alors $[\![p \vee q]\!] = 0$ et $[\![p \Rightarrow q]\!] = 1$ donc $[\![(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]\!] = 0$. Par conséquent $[\![((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)]\!] = 1$.
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$ n'est pas un théorème de la logique intuitionniste, car $p \vee \neg p$ serait un théorème intuitionniste. En effet en remplaçant q par $\neg p$ dans $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$ on obtient $((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \vee \neg p)$. Or, on peut montrer que $(p \Rightarrow p \Rightarrow \bot) \Rightarrow p \Rightarrow \bot$ est un théorème de la logique intuitionniste.

$$\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow p \Rightarrow \bot), p \vdash p \Rightarrow p \Rightarrow \bot \qquad (p \Rightarrow p \Rightarrow \bot), p \vdash p}{(p \Rightarrow p \Rightarrow \bot), p \vdash p \Rightarrow \bot} \qquad (p \Rightarrow p \Rightarrow \bot), p \vdash p}{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow p \Rightarrow \bot), p \vdash \bot}{(p \Rightarrow p \Rightarrow \bot) \vdash p \Rightarrow \bot}}{(p \Rightarrow p \Rightarrow \bot) \Rightarrow p \Rightarrow \bot}}$$

Exercice 2

1. – $((\mathbf{S}@\mathbf{K})\mathbf{K})@x \rightarrow (\mathbf{K}@x)@(\mathbf{K}@x) \rightarrow x$.
   – Une forme normale (en fait la seule) de $\mathbf{I}$ est $\mathbf{I}$ lui-même.
   – Une (la) forme normale de $\mathbf{I}@x$ est x.
2. $\mathbf{S}@\mathbf{I}$ et $\mathbf{W}$ n'ont pas de redex. Le seul redex de $\mathbf{W}@\mathbf{W}$ est constitué de tous le terme, soit $((\mathbf{S}@\mathbf{I})@\mathbf{I})@\mathbf{W}$.
   $((\mathbf{S}@\mathbf{I})@\mathbf{I})@\mathbf{W} \rightarrow (\mathbf{I}@\mathbf{W})@(\mathbf{I}@\mathbf{W})$.
   Ce terme a deux redex, à savoir $\mathbf{I}@\mathbf{W}$ et $\mathbf{I}@\mathbf{W}$.
   Ces deux redex se contractent en $\mathbf{W}$.
   On obtient donc $((\mathbf{S}@\mathbf{I})@\mathbf{I})@\mathbf{W} \xrightarrow{*} \mathbf{W}@\mathbf{W}$.
3. Le système $\mathcal{C}$ ne termine pas puisque qu'il contient le cycle $\mathbf{W}@\mathbf{W} \xrightarrow{*} \mathbf{W}@\mathbf{W}$.
4. Il faut poser $\mathbf{B} = (\mathbf{S}@(\mathbf{K}@\mathbf{S}))@\mathbf{K}$. Adoptons la convention que $A@B@C$ se lit $(A@B)@C$.

   $$\mathbf{S}@(\mathbf{K}@\mathbf{S})@\mathbf{K}@x@y@z \rightarrow \mathbf{K}@\mathbf{S}@x@(\mathbf{K}@x)@y@z \rightarrow \mathbf{S}@(\mathbf{K}@x)@y@z \rightarrow \mathbf{K}@x@z@(y@z) \rightarrow x@(y@z).$$

Exercice 3

1. On calcule :

$$\begin{array}{rcl}
[\![aa]\!](n_1,n_2,n_3,n_4) & = & (n_1+n_2+n_4, n_2, 2n_2+n_4+2, n_4) \\
[\![cb]\!](n_1,n_2,n_3,n_4) & = & (n_1+n_2, n_2, 2n_2+n_4+2, 0) \\
\\
[\![bb]\!](n_1,n_2,n_3,n_4) & = & (n_1+3n_2+n_4+1, 4n_2+2n_4+3, 2n_2+n_4+1, O) \\
[\![ca]\!](n_1,n_2,n_3,n_4) & = & (n_1+2n_2+n_4, 2n_2+2n_4+2, 2n_2+n_4+1, 0) \\
\\
[\![cc]\!](n_1,n_2,n_3,n_4) & = & (n_1+2n_4, n_2+2n_4+1, n_3+n_4+1, 0) \\
[\![ba]\!](n_1,n_2,n_3,n_4) & = & (n_1+2n_4, n_2+2n_4+1, n_4, 0)
\end{array}$$

2. Le système $S = \{aa \to cb, cc \to ba\}$ termine. En effet si l'on prend l'interprétation dans $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl}
[\![a]\!](n) & = & 2n \\
[\![b]\!](n) & = & n \\
[\![c]\!](n) & = & 2n
\end{array}$$

   On a

$$\begin{array}{rcl}
[\![aa]\!](n) & = & 4n \\
[\![cb]\!](n) & = & 2n \\
[\![cc]\!](n) & = & 4n \\
[\![ba]\!](n) & = & 2n.
\end{array}$$

3. On voit que s'il y a une chaîne infinie décroissante, elle contient un nombre infini d'étapes $bb \to ca$ entrelardées de contractions par S. Or par la question 1, l'interprétation d'une telle chaîne décroît et elle décroît strictement une infinité de fois, ce qui est impossible.