Introduction au lambda-calcul
généralités

Pierre Lescanne

28 mars 2007 – 14 : 09

lambda : *adj. fam.* : moyen, quelconque. *téléspectateur lambda*.

Dictionnaire le Robert

Les fonctions, citoyens de première classe

On peut faire que les preuves soient citoyens de première classe, mais pourquoi pas les fonctions ?

Quelques dates

autour de 1870 un Italien[1] s'oppose à Cantor sur le point de savoir quel est le concept de base des mathématiques prétendant que ça devrait être les fonctions.

1920 Schönfinkel initie la logique combinatoire,

1925 Haskell Curry crée la logique combinatoire,

1936 Alonso Church crée le λ-calcul,

[1] dont j'ai oublié le nom.

Quelques dates

1958-1960 Mc Carthy créé LISP, le groupe ad hoc de l'IFIP crée ALGOL 60 (avec la récursivité).

1965 Landin explique comment implanter ALGOL 60 par le lambda-calcul.
Böhm propose un modèles d'implantation fondé sur la logique combinatoire.

1970-... Explosion du λ-calcul due à l'informatique (Barendregt, Berry, Boehm, de Bruijn, Girard, Hindley, Klop, Krivine, Levy, Plotkin, Scott, mais aussi Curien, Statmann etc.)

Des notations différentes, un même concept

en maths	$x \mapsto x$	$f \mapsto (x \mapsto f(f(x)))$
en CAML	`fun x -> x`	`fun f -> (fun x -> (f (f x)))`
en λ-calcul	$\lambda x.x$	$\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))$

Les composants de la syntaxe

La classe Λ est la plus petite classe qui contient

1. x si x est une variable,
2. $\lambda x.M$ si $M \in \Lambda$,
3. (MN) si $M \in \Lambda$ et $N \in \Lambda$.

Les composants de la syntaxe

La classe Λ est la plus petite classe qui contient

1. x si x est une variable,
2. $\lambda x.M$ si $M \in \Lambda$, abstraction
3. (MN) si $M \in \Lambda$ et $N \in \Lambda$. application

Qu'y a-t-il derrière la syntaxe ?

On peut voir les termes comme des abstractions des fonctions ou des programmes fonctionnels.

Dans $\lambda x.M$, on dit que M est le corps de la fonction ou du programme.

Dans (MN), on peut voir M comme une fonction que l'on applique au paramètre N. La valeur va s'obtenir par «réduction» (approche intentionnelle).

Le lambda-calcul décrit les fonctions par leur comportement.

L'anecdote derrière la syntaxe ?

Au début Church voulait écrire $\hat{\mathtt{x}}$.
Mais au temps des machines à écrire on ne savait écrire que `^x`.
Ce qui a donné $\Lambda\mathtt{x}$, puis $\lambda\mathtt{x}$.

Exemples de termes

$$I \equiv \lambda x.x$$
$$K \equiv \lambda x(\lambda y.x)$$
$$S \equiv \lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))$$
$$B \equiv \lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(x(yz))))$$

Convention

1. Au lieu de $\lambda x_1(\ldots(\lambda x_n.M)\ldots)$

   on écrit $\lambda x_1 \ldots x_n.M$.

   Par exemple : $\lambda xy.x$.

2. Au lieu de $(\ldots(MN_1)\ldots N_p)$

   on écrit $MN_1 \ldots N_p$ ou $M\vec{N}$, si $\vec{N} = (N_1 \ldots N_p)$.

   Par exemple, $\lambda xyz.xz(yz)$

   à la place de $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))$.

Convention

Par exemple : $((\lambda x.x)y)y)$ donne $(\lambda x.x)yy$,

«La fonction identité appliquée à y, puis le résultat est appliqué à y».

En revanche, $\lambda x.xyy$ correspond à $\lambda x.(xy)y$.

«La fonction qui à x fait correspondre le résultat de x appliqué à y puis à y».

Les mêmes termes avec conventions

$$I \equiv \lambda x.x$$
$$K \equiv \lambda xy.x$$
$$S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$$
$$B \equiv \lambda xyz.x(yz)$$

Les mêmes termes avec conventions

$I \equiv \lambda x.x$ — I est la fonction identité

$K \equiv \lambda xy.x$ — Kc est la fonction constante c

$S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ — $Sabc$ distribue c

$B \equiv \lambda xyz.x(yz)$ — B permute l'effet des parenthèses

Les variables liées

$$
\begin{aligned}
BV(x) &= \emptyset \\
BV(\lambda x.M) &= BV(M) \cup \{x\} \\
BV(MN) &= BV(M) \cup BV(N)
\end{aligned}
$$

Les variables liées

$$\begin{array}{rcl} BV(x) & = & \emptyset \\ BV(\lambda x.M) & = & BV(M) \cup \{x\} \\ BV(MN) & = & BV(M) \cup BV(N) \end{array}$$

Example

$$\begin{array}{rcl} BV(\lambda x.x) & = & \{x\} \\ BV(\lambda fx.f(fx)) & = & \{f, x\} \\ BV(\lambda fx.f(fxy)y) & = & \{f, x\} \end{array}$$

Les variables libres 1/2

$$\begin{array}{rcl} FV(x) & = & \{x\} \\ FV(\lambda x.M) & = & FV(M) - \{x\} \\ FV(MN) & = & FV(M) \cup FV(N) \end{array}$$

Les variables libres 1/2

$$
\begin{array}{rcl}
FV(x) & = & \{x\} \\
FV(\lambda x.M) & = & FV(M) - \{x\} \\
FV(MN) & = & FV(M) \cup FV(N)
\end{array}
$$

Example

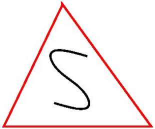
$$
\begin{array}{rcl}
FV(\lambda x.x) & = & \emptyset \\
FV(\lambda fx.f(fx)) & = & \emptyset \\
FV(\lambda fx.f(fxy)y) & = & \{y\} \\
FV(\lambda x.f(fx)) & = & \{f\}
\end{array}
$$

Les variables libres 2/2

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

Les variables libres 2/2

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.



Une variable peut être à la fois libre et liée dans un terme.
Par exemple : $x(\lambda x.x)$.

Le produit cartésien et la curryfication

Il n'y a pas de produit cartésien dans le λ-calcul simple.
Si on veut écrire :

$$\lambda(x, y).f(x, y) \quad \text{ou} \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

on le remplace par

$$\lambda xy.fxy$$

C'est la curryfication (nommée après Haskell Curry).

Substitution

Substituer une variable par un terme ne consiste pas simplement à remplacer toutes les occurrences de la variable par ce terme, à cause du phénomène de capture.

Quand on écrit $M[x := P]$ on ne remplace pas simplement les occurrences de x dans M par P.

Substitution

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} x(\lambda x.x)[x := y] & \neq & y(\lambda x.y) \\ x(\lambda x.x)[x := y\,y] & \neq & y\,y\,(\lambda x.y\,y) \\ (\lambda y.x)[x := y] & \neq & \lambda y.y \end{array}$$

donc il faut être prudent.

Substitution avec renommage

1. $x[x := P] = P$
2. $y[x := P] = y$
3. $(\lambda x.M)[x := P] = \lambda x.M$
4. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.(M[x := P])$
   si $x \notin FV(M)$ ou $y \notin FV(P)$
5. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda z.(M[y := z][x := P])$
   si $x \in FV(M)$ et $y \in FV(P)$
   et z est une nouvelle variable
6. $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

La convention de Barendregt

C'est une convention sur les variables libres d'un terme dans un énoncé mathématique.

Il n'existe aucun sous-terme dans lequel une variable apparaît à la fois libre et liée.

L'α-conversion (règles structurelles)

$$\lambda x.N \equiv_\alpha \lambda y.(N[x := y]) \qquad y \notin FV(N) \qquad \mathit{base}$$

$$\frac{M_1 \equiv_\alpha N_1 \qquad M_2 \equiv_\alpha N_2}{M_1 M_2 \equiv_\alpha N_1 N_2}\ \alpha APP$$

$$\frac{M \equiv_\alpha N}{\lambda z.M \equiv_\alpha \lambda z.N}\ \alpha ABS$$

$$x \equiv_\alpha x \qquad \alpha var$$

Réflexivité de l'α-conversion

Lemme : Pour tout $M \in \Lambda$, on a $M \equiv_\alpha M$.
Par induction structurelle sur M.

M est la variable x dans ce cas on applique l'axiome αVar.

M est une application $M_1 M_2$. Alors par induction on a $M_1 \equiv_\alpha M_1$ et $M_2 \equiv_\alpha M_2$ donc on peut appliquer la règle α APP pour obtenir $M_1 M_2 \equiv_\alpha M_1 M_2$.

M est une abstraction $\lambda x.P$. Par induction $P \equiv_\alpha P$. Donc par la règle α ABS on a $\lambda x.P \equiv_\alpha \lambda x.P$.

L'α-conversion (règles de congruence)

$$\frac{M \equiv_\alpha N}{N \equiv_\alpha M}\ \alpha\mathit{symétrie}$$

$$\frac{M \equiv_\alpha N \qquad N \equiv_\alpha P}{M \equiv_\alpha P}\ \alpha\mathit{transitivité}$$

L'α-conversion (règles de congruence)

$$\frac{M \equiv_\alpha N}{N \equiv_\alpha M}\ \alpha\textit{symétrie}$$

$$\frac{M \equiv_\alpha N \qquad N \equiv_\alpha P}{M \equiv_\alpha P}\ \alpha\textit{transitivité}$$

L'α-conversion est une relation d'équivalence, stable par passage au contexte, on dit que c'est une congruence.

La convention de Barendregt

L'α-conversion ne change pas la «signification» des termes.

- On suppose que dans tout théorème que l'on énonce, on suit la convention de Barendregt.
- Si l'on a un terme qui ne satisfait pas la convention de Barendregt, on s'y ramène par α-conversion

Substitution et convention de Barendregt

Avec la convention de Barendregt, la définition des substitutions devient beaucoup plus simple.

- $x[x := P] = P$
- $y[x := P] = y$
- $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.M[x := P]$
- $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

La β-contraction

Les fonctions sont faites pour calculer !
Les réductions d'un terme représentent son calcul.
La β-contraction en est l'étape élémentaire.

$$(\lambda x.M)P \xrightarrow[\beta]{} M[x := P]$$

R-réduction

On se donne un ensemble R de règles, c-à-d de paires de termes, par exemple β.

$M \xrightarrow[R]{} N$ signifie que M se contracte en N par R.

R-contraction

(contraction) $$\frac{(M, N) \in R}{M \xrightarrow[R]{} N}$$

(ξ) $$\frac{M \xrightarrow[R]{} N}{\lambda x M \xrightarrow[R]{} \lambda x N}$$

(congruence gauche) $$\frac{M \xrightarrow[R]{} N}{MP \xrightarrow[R]{} NP}$$

(congruence droite) $$\frac{M \xrightarrow[R]{} N}{PM \xrightarrow[R]{} PN}$$

$\xrightarrow[R]{}$ est alors appelée une contraction.

Exercice

Contracter

- $\lambda y.(\lambda x.x)z$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda x.x)$
- $(\lambda fx.f(fx))(\lambda fx.fx)$

D'autres exemples de contractions

La contraction η

Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$\lambda x.Mx \quad \xrightarrow[\eta]{} \quad M.$$

L'expansion η

Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$M \quad \xrightarrow[\eta_{exp}]{} \quad \lambda x.Mx.$$

D'autres exemples de contractions

La contraction par β et η

$$\xrightarrow[\beta\eta]{} \quad = \quad \xrightarrow[\beta]{} \cup \xrightarrow[\eta]{} .$$

On s'intéresse à la $\beta\eta$-réduction $\xrightarrow[\beta\eta]{}\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ qui est la fermeture transitive et réflexive de $\xrightarrow[\beta\eta]{}$.

Fermeture transitive et réflexive

(cas de base) $\dfrac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\rightarrow N}$ (réflexivité) $M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\rightarrow M$

(transitivité) $\dfrac{M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\rightarrow N \qquad N \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\rightarrow L}{M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\rightarrow L}$

Proposition

Préservation de $\xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow$ par abstraction et application

$$\frac{M \twoheadrightarrow_{\beta} N}{\lambda x.M \twoheadrightarrow_{\beta} \lambda x.N}$$

$$\frac{M \twoheadrightarrow_{\beta} N \qquad P \twoheadrightarrow_{\beta} Q}{MP \twoheadrightarrow_{\beta} NQ}$$

Proposition

$\boxed{\text{Préservation de } \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow \text{ par abstraction et application}}$

Cas $\dfrac{M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow N}{\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.N}$

On doit montrer que

- sous l'hypothèse $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow N$
- on a la conclusion $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.N$.

La démonstration est par induction sur la taille de l'arbre de preuve de $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow N$.

Elle utilise les règles de la définition de $\xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow$ et celle de $\xrightarrow[\beta]{}$.

Proposition

$\boxed{\text{Préservation de } \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\rightarrow \text{ par abstraction et application}}$

Trois cas se présentent :

1. $M \xrightarrow[\beta]{} N$, on a utilisé le «cas de base», alors par (ξ), $\lambda x.M \xrightarrow[\beta]{} \lambda x.N$ et on conclut par le «cas de base».
2. $M \equiv N$, alors $\lambda x.M \equiv \lambda x.N$ et conclut par «réflexivité».
3. Il existe P tel que $M \twoheadrightarrow_\beta P$ et $P \twoheadrightarrow_\beta N$. Par induction, on tire,
    - $\lambda x.M \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.P$
    - et $\lambda x.P \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.N$,

    et par «transitivité» $\lambda x.M \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.N$.

Fermeture transitive, réflexive et symétrique

Avec les règles

$$\text{(cas de base)}\quad \frac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \overset{}{\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}} N} \qquad \text{(réflexivité)}\quad M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} M$$

$$\text{(transitivité)}\quad \frac{M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \qquad N \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} L}{M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} L} \qquad \text{(symétrie)}\quad \frac{M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N}{N \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} M}$$

on obtient la fermeture transitive, réflexive et symétrique de $\xrightarrow[R]{}$

dite aussi R-conversion.

Fermeture transitive, réflexive et symétrique

- La R-conversion s'écrit $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ ou $=_R$,
- $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} P$ se dit
  - M est R-égal à P
  - ou M est R-convertible à P.

Contexte

Un contexte $C[\,]$ est défini ainsi

1. $[\,]$ est un contexte,
2. si $M \in \Lambda$ et si $C[\,]$ est un contexte alors $MC[\,]$ et $C[\,]M$ sont des contextes,
3. si $C[\,]$ est un contexte alors $\lambda x.C[\,]$ est un contexte.

Contexte

Définition Si $C[\,]$ est un contexte et $A \in \Lambda$ alors $C[A]$ est défini par induction sur $C[\,]$.

- $[A] = A$,
- si $C[\,] = \lambda x.D[\,]$ alors $C[A] = \lambda x.D[A]$,
- si $C[\,] = MD[\,]$ alors $C[A] = MD[A]$,
- si $C[\,] = D[\,]M$ alors $C[A] = D[A]M$,

Stabilité

Un relation $\xrightarrow[R]{}$ est stable par contexte si

$M \xrightarrow[R]{} N$ alors $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$.

Un relation $\xrightarrow[R]{}$ est stable par substitution si

$M \xrightarrow[R]{} N$ alors $P[x := M] \xrightarrow[R]{} P[x := N]$.

Stabilité

Proposition Soit $\xrightarrow[R]{}$ une contraction.

$\xrightarrow[R]{}$, $\xrightarrow[R]{*}$ et $\xleftrightarrow[R]{*}$ sont stables par contexte.

$\xrightarrow[R]{*}$ et $\xleftrightarrow[R]{*}$ sont stables par substitutions.

$\boxed{\xrightarrow[R]{} \text{ est stable par contexte.}}$

Démonstration : $M \xrightarrow[R]{} N$ alors $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$

Par induction sur la structure de $C[\,]$, sachant que $M \xrightarrow[R]{} N$.

1. $C[\,] = [\,]$ alors $C[M] = M$ et $C[N] = N$, évident.
2. $C[\,] = AD[\,]$,
   - par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$,
   - d'autre part, $C[M] = AD[M]$ et $C[N] = AD[N]$,
   - donc par congruence à droite $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$.
3. $C[\,] = D[\,]A$, comme 2 en changeant «droite» en «gauche».
4. $C[\,] = \lambda x.D[\,]$, par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$, d'où la conclusion par (ξ).

Stabilité par substitution

Proposition $\boxed{M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \twoheadrightarrow N \text{ implique } A[x := M] \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \twoheadrightarrow A[x := N].}$

Stabilité par substitution

Proposition $\boxed{M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \rightarrow N \text{ implique } A[x := M] \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \rightarrow A[x := N].}$

Démonstration : L'hypothèse est $M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \rightarrow N$.

La démonstration se fait par induction sur A.

- $A \equiv x$, alors $A[x := M] \equiv M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \rightarrow N \equiv A[x := N]$.
- $A \equiv y$, alors $A[x := M] \equiv y \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\! \rightarrow y \equiv A[x := N]$ par réflexivité.

Stabilité par substitution (suite)

- $A \equiv \lambda y.B$,
  par induction $B[x := M] \underset{R}{\twoheadrightarrow} B[x := N]$,
  donc $A[x := M] \equiv \lambda y.B[x := M]$ et
  $A[x := N] \equiv \lambda y.B[x := N]$,
  par (ξ) pour $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$, on a
  $\lambda y.B[x := M] \underset{R}{\twoheadrightarrow} \lambda y.B[x := N]$.

Stabilité par substitution (suite)

- $A \equiv BB'$
  par induction

$$\begin{array}{ccc} B[x := M] & \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\!\twoheadrightarrow & B[x := N] \\ B'[x := M] & \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\!\twoheadrightarrow & B'[x := N] \end{array}$$

par définition de la substitution

$$\begin{array}{ccc} A[x := M] & \equiv & B[x := M]\ B'[x := M] \\ A[x := N] & \equiv & B[x := N]\ B'[x := N] \end{array}$$

Stabilité par substitution (suite)

par congruence et transitivité de $\xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ on a

$$\dfrac{\dfrac{B[x := M] \twoheadrightarrow B[x := N]}{B[x := M]B'[x := M] \twoheadrightarrow B[x := N]B'[x := M]} \quad \dfrac{B'[x := M] \twoheadrightarrow B'[x := N]}{B[x := N]B'[x := M] \twoheadrightarrow B[x := N]B'[x := N]}}{B[x := M]B'[x := M] \twoheadrightarrow B[x := N]B'[x := N]}$$

Exercice

Montrez que ça ne peut pas marcher pour $\xrightarrow[R]{}$,

c-à-d qu'on n'a pas :

$M \xrightarrow[R]{} N$ *implique* $A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

Quelques définitions

- Un R-redex est un terme M tel que $(M, N) \in R$.
- N et le R-contracté de M.
- Un terme M est R-irréductible si M ne contient aucun R-redex.

Quelques exemples de redex

- Les β-redex sont de la forme $(\lambda x.M)N$.
- Les η-redex sont de la forme $\lambda x.(Mx)$ si x n'est pas libre dans M.
  Tout terme est un redex pour l'expansion η.

Formes normales

Un terme N est une forme normale de M,

si N est R-irréductible et si $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$.

On n'affirme

- ni l'existence cf le terme $(\lambda x.xx)\ (\lambda x.xx)$,
- ni l'unicité, il y a unicité pour β, mais il faut le prouver.

La forme β-normale de M si elle existe (et si on a prouvé l'unicité) est la valeur intentionnelle de M.

Exercice

Lesquels de ces termes sont des formes normales ?

$(\lambda x.x)$

$((\lambda xy.x)v)w$

$(\lambda xy.xv)w$

$\lambda xy.xvw$

$(\lambda x.xx)\ (\lambda x.xx)$

$(\lambda xy.y)((\lambda x.xx)\ (\lambda x.xx))$

Ω et les autres

$$
\begin{aligned}
&\omega \equiv \lambda x.xx\\
&\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)\\
&\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))\\
&\mathsf{W}_F \equiv (\lambda x.F(xx))
\end{aligned}
$$

Exercice

Montrez que Ω se récrit vers un unique terme. Lequel ?
Plus précisément, montrez qu'il existe un terme unique $M \in \Lambda$ tel que $\Omega \xrightarrow[\beta]{} M$.

Ω n'a pas de forme normale.

Exercice

1. Montrez que $\mathbf{Y}F \xrightarrow[\beta]{} F(\mathrm{W}_F\mathrm{W}_F)$.
2. Montrez que $F(\mathbf{Y}F) \xrightarrow[\beta]{} F(\mathrm{W}_F\mathrm{W}_F)$.
3. Conclure que $\mathbf{Y}F \xleftrightarrow[\beta]{} F(\mathbf{Y}F)$.
4. Quels sont les points fixes de $\mathbf{I}$, c'est-à-dire quels sont les termes M tels que $\mathbf{I}M \xrightarrow[\beta]{} M$?
5. Quel point fixe est fourni par $\mathbf{Y}\,\mathbf{I}$?

$\mathbf{Y}$ est appelé le combinateur de point de fixe.

$\mathbf{Y}$ n'a pas de forme normale.

Entiers de Church

- $(\lambda fx.f(fx)) \equiv \mathbf{2}$ correspond au nombre entier deux.
- $(\lambda fx.x) \equiv T$ correspond à zéro.
- $(\lambda fx.fx) \equiv \mathbf{1}$ correspond à un.
- Plus généralement l'entier **n** est le terme $(\lambda fx.f^n x)$.

Exercice

1. Montrez que
$$\mathbf{1} \xrightarrow[\eta]{} I \equiv \lambda x.x.$$
2. Écrivez l'opération «successeur».
3. Écrivez les opérations d'«addition» et de «multiplication».
4. Calculez
   - $\mathbf{1}\mathbf{2}$,
   - $\mathbf{2}\mathbf{1}$,
   - $\mathbf{2}\mathbf{2}$,
5. A quoi correspond **mn** ?

Corrigé

En effet,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{1} & \equiv & \lambda fx.fx \\ & \xrightarrow[\eta]{} & \lambda f.f \equiv I. \end{array}$$

Corrigé

Le successeur est **succ** $\equiv \lambda nfx.n\ f\ (f\ x)$,
l'addition est **add** $\equiv \lambda mnfx.\ m\ f\ (n\ f\ x)$,
tandis que la multiplication est **mult** $\equiv \lambda mnf.\ m\ (n\ f)$.

Corrigé

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{22} & \equiv & (\lambda fx.f(f\ x))\ (\lambda gy.g(g\ y)) \\
& \longrightarrow & \lambda x.(\lambda gy.g(g\ y))\ ((\lambda hz.h(h\ z))\ x) \\
& \longrightarrow & \lambda x.(\lambda gy.g(g\ y))\ (\lambda z.x(x\ z)) \\
& \longrightarrow & \lambda xy.(\lambda z.x(x\ z))\ ((\lambda w.x(x\ w))y) \\
& \longrightarrow & \lambda xy.(\lambda z.x(x\ z))\ (x\ (x\ y)) \\
& \longrightarrow & \lambda xy.x(x\ (x\ (x\ y))) \\
& \equiv & \lambda fx.f(f\ (f\ (f\ x))) \quad \equiv \quad \mathbf{4}
\end{array}
$$

Corrigé

Appelons $\mathbf{p} \equiv \lambda mn.m\ n$ cette opération.
Autrement dit $\mathbf{p}\ \mathbf{m}\ \mathbf{n} = \mathbf{m}\ \mathbf{n}$.
On remarque que

$$
\begin{array}{ccl}
\mathbf{p}\ \mathbf{0}\ \mathbf{n} & \xrightarrow[\beta]{} & (\lambda fx.x)\ \mathbf{n} \\
 & \xrightarrow[\beta]{} & \lambda x.x \\
 & \xleftarrow[\eta]{} & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Corrigé

et que

$$\begin{array}{llll}
\textbf{p}\ (\textbf{succ}\ \textbf{m})\ \textbf{n}\ x & \xrightarrow[\beta]{} & \textbf{succ}\ \textbf{m}\ \textbf{n}\ x & \text{Définition de } \textbf{p} \\
& \xrightarrow[\beta]{} & (\textbf{m}\ \textbf{n})\ (\textbf{n}\ x) & \text{Définition de } \textbf{succ} \\
& \xleftarrow[\beta]{} & \textbf{mult}\ (\textbf{m}\ \textbf{n})\ \textbf{n}\ x & \text{Définition de } \textbf{mult} \\
& \xleftarrow[\beta]{} & \textbf{mult}\ (\textbf{p}\ \textbf{m}\ \textbf{n})\ \textbf{n}\ x & \text{Définition de } \textbf{p}.
\end{array}$$

Corrigé

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{p\ 0\ n} &=_{\beta\eta} \mathbf{1} \\ \mathbf{p\ (succ\ m)\ n} &=_{\beta\eta} \mathbf{mult\ (p\ m\ n)\ n} \end{aligned}$$

Corrigé

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{p\ 0\ n} &=_{\beta\eta} \mathbf{1} \\ \mathbf{p\ (succ\ m)\ n} &=_{\beta\eta} \mathbf{mult\ (p\ m\ n)\ n} \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} n^0 &= 1 \\ n^{m+1} &= n^m \cdot n. \end{aligned}$$

p est un bon candidat pour représenter l'exponentielle.
Il y a simplement un problème : on «applique» un entier à un entier.

Le lambda calcul est maximalement cohérent

Supposons que l'on ajoute au lambda calcul l'identité $\mathbf{S} = \mathbf{K}$.
Notons que d'une part

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{S}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ P)\ \mathbf{I} & \xrightarrow[\beta]{3} & \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ P\ \mathbf{I}) \\
& \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ P\ \mathbf{I}) \\
& \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{K}\ P\ \mathbf{I} \\
& \xrightarrow[\beta]{} & P
\end{array}
$$

Le lambda calcul est maximalement cohérent

et d'autre part

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{K}\ \mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ P)\ \mathbf{I} & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{I}\ \mathbf{I} \\ & \xrightarrow[\beta]{} & \mathbf{I} \end{array}$$

Donc de $\mathbf{S} = \mathbf{K}$ on déduit que pour tout terme P on a $P = \mathbf{I}$.

Le lambda calcul est maximalement cohérent

Autrement dit, si on ajoute au lambda calcul l'unique égalité $\mathbf{S} = \mathbf{K}$, on le rend incohérent en autorisant tous les termes à être égaux.