Licence d'Informatique fondamentale

Partiel de programmation 2

2006-2007

Documents autorisés. Pas d'ordinateurs.
Dans le cas de questions ouvertes justifiez votre réponse. Plus la réponse sera précise et succincte, plus elles sera appréciée par le correcteur.

Exercice 1

1. Montrer que $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ est un théorème de la logique intuitionniste.
2. Montrer que $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$ est un théorème de la logique classique.
3. Est-ce que $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$ est un théorème de la logique intuitionniste ?

Exercice 2

On considère la signature $\Sigma = \{\mathsf{S}, \mathsf{K}, @\}$ où K et S sont des constantes et @ est un opérateur dyadique (ou binaire) noté de façon infixe et le système de récriture $\mathcal{C}$ sur les termes sur Σ défini par les deux règles :

$$\begin{aligned} (\mathsf{K}@x)@y &\rightarrow x && (1) \\ ((\mathsf{S}@x)@y)@z &\rightarrow (x@z)@(y@z). && (2) \end{aligned}$$

Quelques abréviations : pour la suite on considère quelques abréviations pour certains termes utiles ($\triangleq$ signifie *est égal par définition*).

$$\begin{aligned} \mathsf{I} &\triangleq (\mathsf{S}@\mathsf{K})@\mathsf{K} \\ \mathsf{W} &\triangleq (\mathsf{S}@\mathsf{I})@\mathsf{I} \end{aligned}$$

1. Réduire $((\mathsf{S}@\mathsf{K})@\mathsf{K})@x$. Quelle est une forme normale de I ? Quelle est une forme normale de $\mathsf{I}@x$?
2. Montrer que $\mathsf{W}@\mathsf{W}$ n'a qu'un seul redex ? Quel est ce redex ? Contracter ce redex. Montrer que le terme obtenu a deux redex. Contracter ces deux redex.
3. Est-ce que le système $\mathcal{C}$ termine ?
4. Exhiber un terme B tel que

$$((\mathsf{B}@x)@y)@z \quad \rightarrow \quad x@(y@z).$$

Exercice 3

On considère le système de récriture de mots.

$$Z = \{aa \rightarrow cb, bb \rightarrow ca, cc \rightarrow ba\}$$

On prend la vision des mots comme des termes monadiques et on considère l'algèbre ordonnée de support $\mathbb{N}^4$ et d'ordre $\succ$, où

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) \succ (n'_1, n'_2, n'_3, n'_4) \qquad \text{si} \qquad n_1 > n'_1 \qquad \text{et} \qquad n_2 \geq n'_2, n_3 \geq n'_3, n_4 \geq n'_4.$$

$\succeq$ est la clôture réflexive de $\succ$. On considère l'interprétation :

$$\begin{aligned}
[\![a]\!](n_1, n_2, n_3, n_4) &= (n_1 + n_4, n_4, n_2 + 2n_4 + 2, n_2) \\
[\![b]\!](n_1, n_2, n_3, n_4) &= (n_1 + n_2, 2n_2 + n_4 + 1, n_2, 0) \\
[\![c]\!](n_1, n_2, n_3, n_4) &= (n_1 + 2n_4, n_3 + n_4, n_2 + 2n_4 + 1, 0)
\end{aligned}$$

1. Calculer puis comparer pour l'ordre $\succ$ et/ou l'ordre $\succeq$, $[\![aa]\!](n_1, n_2, n_3, n_4)$ et $[\![cb]\!](n_1, n_2, n_3, n_4)$ ainsi que $[\![bb]\!](n_1, n_2, n_3, n_4)$ et $[\![ca]\!](n_1, n_2, n_3, n_4)$, ainsi que $[\![cc]\!](n_1, n_2, n_3, n_4)$ et $[\![ba]\!](n_1, n_2, n_3, n_4)$.
2. Montrer que le système $S = \{aa \to cb, cc \to ba\}$ termine.
3. Conclure.

Indication : S'il n'y a pas de coquille, on doit pouvoir montrer que

$$\begin{aligned}
[\![aa]\!](n_1, n_2, n_3, n_4) &\succeq [\![cb]\!](n_1, n_2, n_3, n_4), \\
[\![bb]\!](n_1, n_2, n_3, n_4) &\succ [\![ca]\!](n_1, n_2, n_3, n_4), \\
[\![cc]\!](n_1, n_2, n_3, n_4) &\succeq [\![ba]\!](n_1, n_2, n_3, n_4).
\end{aligned}$$