TD1 Logique: Validité et Systèmes Hilbertiens

Romain Demangeon et Pierre Lescanne

27 et 28 Janvier 2009

1 Modèle $\{0, 1\}$

On se place dans le modèle classique $\{0, 1\}$. Une formule ϕ est une *tautologie* si son interprétation $[\phi]_I$ est 1 et une *antilogie* si son interprétation est 0.

Q 1.1 Donner les interprétations canoniques des connecteurs $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee$.

Q 1.2 Montrer que le *tiers exclu* : $p \vee \neg p$ est une tautologie.

Q 1.3 Montrer que $\neg\neg p \Rightarrow p$ est une tautologie.

Q 1.4 Montrer que la *Formule de Pierce* : $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ est une tautologie.

Q 1.5 Soit p une antilogie et q une formule. Montrer que $p \Rightarrow q$ est une tautologie.

Q 1.6 Montrer que $p \wedge \neg p$ est une antilogie.

2 Modèle topologique

On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Une proposition y est interprétée par un *ouvert* de cette topologie, et on dira qu'une formule est valide si son interprétation égale $\mathbb{R}$ tout entier.

Q 2.1 Proposer une interprétation pour Vrai, Faux, les connecteurs $\wedge$, puis $\vee$ et $\Rightarrow$. (On notera $o(p)$ l'ouvert de $\mathbb{R}$ qui interprète la proposition p.)

Q 2.2 Calculer $o(p \Rightarrow p)$, $o(p \Rightarrow \neg\neg p)$, $o(p \vee \neg p)$, $o(((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.

Q 2.3 Quelle observation peut-on faire ?

3 Systèmes hilbertiens : Logique Minimale

On se place dans le système K, S :

$$\mathbf{S} : (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r \qquad \mathbf{K} : p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \qquad (\mathbf{A})\ \frac{p \Rightarrow q \qquad p}{q}$$

Q 3.1 Montrer les théorèmes suivants :

1. $\mathbf{I} : p \Rightarrow p$
2. $\mathbf{B} : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$

Q 3.2 Montrer les règles dérivées suivantes :

1. $(\mathbf{C})\ \dfrac{p \Rightarrow q \Rightarrow r}{q \Rightarrow p \Rightarrow r}$
2. $\dfrac{p \Rightarrow q \qquad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$

4 Systèmes Hilbertiens : Logique Intuitionniste

On ajoute les axiomes de la logique intuitionniste :

F : $\bot \Rightarrow p$ **Or0** : $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$ **0r1** : $p \Rightarrow p \vee q$ **Or2** : $q \Rightarrow p \vee q$

And0 : $p \Rightarrow q \Rightarrow p \wedge q$ **And1** : $p \wedge q \Rightarrow p$ **And2** : $p \vee q \Rightarrow q$

Q 4.1 Montrer les théorèmes suivants :

1. $\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
2. $\vdash \neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

Q 4.2 Montrer les règles suivantes :

$$(\textbf{EFQS})\ \frac{p \qquad \neg p}{q} \qquad (\textbf{Drop})\ \frac{p}{q \Rightarrow p} \qquad (\textbf{Double})\ \frac{p \Rightarrow p \Rightarrow q}{p \Rightarrow q}$$

$$(\textbf{And3})\ \frac{p \Rightarrow q \qquad p \Rightarrow r}{p \Rightarrow q \wedge r} \qquad (\textbf{Or3})\ \frac{p \Rightarrow r \qquad q \Rightarrow r}{(p \vee q) \Rightarrow r}$$

Q 4.3 Que dire de la formule de Pierce ?

5 Heures Supplémentaires

Une démonstration

1. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
2. $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
3. $(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
4. $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$
5. $(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + (2n+1)^2/4 = n^2 - n(2n+1) + (2n+1)^2/4$
6. $((n+1) - (2n+1)/2)^2 = (n - (2n+1)/2)^2$
7. $(n+1) - (2n+1)/2 = n - (2n+1)/2$
8. $n + 1 = n$
9. $1 = 0$

Pour s'entrainer avec les arbres de preuves des Systèmes Hilbertiens. (*Indice : Utiliser une feuille A3*)

Q 5.1 Logique Minimale. Montrer :

$$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p) \qquad \vdash (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow r$$

Q 5.2 Logique Intuitionniste. Montrer :

$$\vdash (p \vee q) \Rightarrow (q \vee p) \qquad \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r) \Rightarrow (q \vee r) \qquad \vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

la règle dérivée $\dfrac{p \Rightarrow r \qquad q \Rightarrow s}{p \wedge q \Rightarrow r \wedge s}$