TD 10: Terminaison (suite)

Romain Demangeon et Pierre Lescanne

7 et 8 avril 2009

> Gal, amant de la reine, alla, tour magnanime,
> Galamment de l'arène, à la tour Magne, à Nimes.

Correspondance de Post et indeécidabilité de la terminaison

Étant donné un alphabet A, un ensemble $\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$, où $\alpha_1 \in A^*$ et $\beta_i \in A^*$, est appelé un *problème de correspondance de Post*. Une *holorime* est formée

- d'un mot $w \in A^*$,
- et d'une suite $(i_1, \ldots, i_p) \in [1..n]^+$ tels

$$w = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_p} = \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_p}.$$

1. Les problèmes de correspondance ci-dessus :

i	α_i	β_i
1	010	101
2	00	000
3	101	10

1

i	α_i	β_i
1	101	10
2	11	011
3	011	101

2

   ont-ils une holorime ?

2. Et ceux là ?

i	α_i	β_i
1	011	1
2	1	0
3	0	011
4	10	001

3

i	α_i	β_i
1	000	0
2	0	111
3	11	0
4	10	100

4

Fait : Le problème de correspondance de Post (ou PCP) est *indécidable*, à partir de deux éléments dans A.

Autrement dit, il n'y a pas d'algorithme avec
- *entrée :* un PCP sur deux lettres,
- *sortie :* le problème a une holorime ou le problème n'a pas d'holorime.

3. Donner une famille systèmes de récriture tels que chaque système R_P soit associé à un problème de correspondance de Post P avec la propriété que le système R_P ne termine pas si et seulement si le problème P a une holorime.
4. En conclure que le problème de la terminaison des systèmes de récriture est indécidable.
5. Est-ce que l'on pas démontré l'indécidabilité d'une propriété plus faible que la terminaison d'un système de récriture ?

La fonction de Sudan

La fonction de Sudan (inventée en 1927 par Gabriel Sudan, un mathématicien roumain qui fut un étudiant de Hilbert) est une ancêtre de la fonction d'Ackermann-Peter. C'est la fonction à trois arguments entiers naturels suivante :

$$\begin{array}{rcl} F_0(x,y) & = & x+y \\ F_{n+1}(x,0) & = & x \\ F_{n+1}(x,y+1) & = & F_n(F_{n+1}(x,y), F_{n+1}(x,y)+y+1) \end{array}$$

1. Associer à cette fonction un système de récriture. On veillera à définir aussi les fonctions auxiliaires.
2. Prouver la terminaison de ce système de récriture.

L'ordre de décomposition

On note $\vec{t}$ une liste de termes. La liste des termes à la position p est définie comme suit :
- $f\vec{t} \nabla \epsilon \triangleq \vec{t}$,
- $f\vec{t} \nabla \, i\,p \triangleq t_i \nabla p$.

Par définition, un *chemin* p de t est une position terminale dans $Pos(t)$, c'est-à-dire une position telle que $p\,1 \notin Pos(t)$.

La *décomposition élémentaire* de t à la position p est définie par

$$edec(t,p) \quad = \quad \langle t(p), t \;\nabla\; p\rangle.$$

La *décomposition composite* le long du chemin p est définie par

$$pdec(t,p) \quad = \quad \{edec(t,q) \mid q \leq p\}.$$

La *décomposition* du terme t est définie comme

$$dec(t) \quad = \quad \{pdec(t,p) \mid p \text{ chemin de } t\}.$$

On suppose que l'on s'est donné un ordre $<$ sur la signature Σ, dit *précédence*, auquel on ajoute $x \# f$ (x est incomparable avec f) pour $x \in Var$ et $f \in \Sigma$. L'*ordre de décomposition* s'écrit $<_d$ et est défini comme le plus petit ordre qui satisfait les conditions suivantes :

– L'ordre $<_{ed}$ sur les décompositions élémentaires est défini par

$$\langle f, \vec{s}\rangle <_{ed} \langle g, \vec{t}\rangle \qquad \text{si et seulement si} \qquad (f < g) \quad \vee (f = g \wedge \vec{s} <_d^{lex} \vec{t}).$$

– L'ordre $<_{pd}$ sur les décompositions composites est défini comme l'extension aux ensembles[1] de l'ordre $<_{ed}$.
– L'ordre sur les décompositions $<_{dec}$ est défini comme l'extension multiensemble de l'ordre $<_{pd}$.
– L'ordre de décomposition $<_d$ est défini par $s <_d t$ si et seulement si $dec(s) <_{dec} dec(t)$.

1. Montrer que si $t_{|p} = f\vec{s}$ alors $t \ \nabla \ p = \vec{s}$.
2. Posons $\Sigma_1 \triangleq \{suc, +, 0\}$ avec les arités habituelles et la précédence $suc < +$. On pose $t_1 \triangleq suc(x) + y$ et $t_2 \triangleq suc(x + y)$.
   Donner $pdec(t_1, 11)$, $pdec(t_1, 2)$, $dec(s)$, ainsi que $pdec(t_2, 11)$, $pdec(t_2, 12)$ et $dec(t_2)$.
   Comparer t_1 et t_2 par $<_d$.
3. Montrer que si la précédence $<$ termine, l'ordre $<_d$ termine.
4. Montrer que $<_d$ contient $<_{lpo}$, autrement dit que $\qquad s <_{lpo} t \qquad \Rightarrow \qquad s <_d t.$
5. Comparer $x * h(x * y)$ et $h(h(x) * y)$ par $<_{lpo}$ et $<_d$ pour une précédence où h et $*$ sont incomparables.
6. L'ordre de clôture est l'ordre $<_c$ défini par

   $s <_c t$ si set seulement si pour toute précédence $\prec$ totale qui contient $<$ on a $s \prec_{lpo} t$.

   Montrer que $<_c$ contient $<_d$.
7. Montrer les inclusions suivantes d'ordre :

$$\lhd \subset \blacktriangleleft \subset \xleftarrow[\mathcal{EMB}]{} \subset <_{lpo} \subset <_d \subset <_c$$

   où $\lhd$ est l'ordre sous-terme et les autres ont été soit définis en cours, soit définis plus haut.
   Montrer par des contre-exemples que toutes les inclusions sont strictes.

[1] Cas particulier des multiensembles.