TD3 Logique: Traduction de Gödel

Romain Demangeon et Pierre Lescanne

9 et 10 Février 2008

1 Curry-Howard

Q 1.1 Annoter par des types quelques dérivations de la question 1 du TD 2.

Q 1.2 Prouver que la formule $p \Rightarrow (q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ n'est pas prouvable dans NJ.

Q 1.3 Décrire l'ensemble des termes clos habitants le type $\sigma \to \sigma$

Q 1.4 (Question 1.7 du TD9 de Prog1) : Soit E un type sans habitant. Dire quels sont les types habités par un terme clos :

$$\sigma \to E \qquad E \to E \qquad \sigma \to ((\sigma \to E) \to E) \qquad ((\sigma \to E) \to E) \to \sigma$$

$$(\sigma \to E) \to (\sigma \to E) \qquad ((\sigma \to \tau) \to \sigma) \to \sigma$$

2 Transformée/ation de Gödel

On introduit maintenant une transformation sur les formules due à Gödel. Elle est définie par induction structurelle sur la proposition p :

$$G(\bot) = \bot \qquad G(p) = \neg\neg p \text{ si } p \text{ est atomique } \neq \bot. \qquad G(p \vee q) = \neg(\neg G(p) \wedge \neg G(q))$$

$$G(p \wedge q) = G(p) \wedge G(q) \qquad G(p \Rightarrow q) = G(p) \Rightarrow G(q)$$

Q 2.1 Montrer que si p est une proposition construites avec $\Rightarrow$ et $\wedge$ à partir de $\bot$ et de la double négation des formules atomiques, alors $\vdash_{NJ} p \Leftrightarrow \neg\neg p$.

Q 2.2 Montrer que la transformation de Gödel ne change pas la prouvabilité classique

$$\vdash_{NK} p \Leftrightarrow G(p)$$

.

Q 2.3 En déduire que $\Gamma \vdash_{NK} p$ si et seulement si $G(\Gamma) \vdash_{NJ} G(p)$.

Q 2.4 Enoncer la conclusion de cette exercice.

FIG. 1 – *Kurt Gödel* is watching you.

3 Devoirs de vacances : premier ordre

On rappelle les règles de déduction naturelle pour les quantificateurs :

$$(\forall - \mathbf{I})\ \frac{\Gamma \vdash A(x) \qquad x \text{ non-libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)} \qquad\qquad (\forall - \mathbf{E})\ \frac{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}{\Gamma \vdash A[a/x]}$$

$$(\exists - \mathbf{I})\ \frac{\Gamma \vdash A[a/x]}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)} \qquad\qquad (\exists - \mathbf{E})\ \frac{\Gamma \vdash \exists x.A(x) \qquad \Gamma, A \vdash B \qquad x \text{ non libre dans } \Gamma, B}{\Gamma \vdash}$$

Q 3.1 Montrer dans NJ ou NK :

$$\vdash \forall x.(p \wedge q) \Leftrightarrow (\forall x.p) \wedge (\forall x.q) \qquad\qquad \vdash \forall x.p \vee \exists x.\neg p \text{ avec } x \text{ libre dans } p$$

$$\forall x.(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \forall x.q) \text{ avec } x \text{ pas libre dans } q \qquad\qquad \vdash \neg\forall x.p \Leftrightarrow \exists x.\neg p$$

Q 3.2 Montrer (dans NK surtout) :

$$\vdash \exists x.\forall y.(R(x) \Rightarrow R(y)) \qquad\qquad \vdash \exists x.\forall y.[S(y) \Rightarrow R(x)] \Rightarrow [S(x) \Rightarrow R(y)]$$

$$\vdash \exists x.\forall y.[[R(f(x)) \Rightarrow R(f(y))] \Rightarrow R(x)] \Rightarrow R(y)$$