Master d'Informatique Fondamentale

Examen de récriture et bases de la sémantique

Mai 2006

Documents autorisés

Exercice 1 : un système de récriture

La fonction de Sudan (inventée en 1927 par Gabriel Sudan, un mathématicien roumain qui fut une étudiant de Hilbert) est une ancêtre de la fonction d'Ackermann-Peter. C'est la fonction à trois arguments entiers naturels suivante :

$$\begin{array}{rcl} F_0(x,y) & = & x+y \\ F_{n+1}(x,0) & = & x \\ F_{n+1}(x,y+1) & = & F_n(F_{n+1}(x,y), F_{n+1}(x,y)+y+1) \end{array}$$

1. Associer à cette fonction un système de récriture. On veillera à définir aussi les fonctions auxiliaires.
2. Prouver la terminaison de ce système de récriture.

Exercice 2 : bisimilarité faible

On considère un système de transitions étiquetées, défini par la donnée d'un ensemble de *processus* (notés P, P', Q, Q'), d'un ensemble d'*actions* (notées α), et d'une relation de transition, donnée par des triplets (P, α, P'), où P et P' sont des processus et α est une action. Un tel triplet sera noté $P \xrightarrow{\alpha} P'$, ce que l'on interprétera intuitivement comme *«le processus P est capable d'effectuer l'action α et ce faisant de se transformer en le processus P'»*. On peut aussi voir la relation de transition comme une application qui à toute action α associe la relation binaire entre processus $\xrightarrow{\alpha}$.

On suppose de plus l'existence d'une action particulière, appelée τ.

On définit à partir de ce système de transitions étiquetées une *relation de transition faible*, notée $\stackrel{\alpha}{\Rightarrow}$, de la manière suivante :

- pour $\alpha = \tau$, on pose $\stackrel{\tau}{\Rightarrow} \stackrel{\text{def}}{=} (\xrightarrow{\tau})^*$, la clôture réflexive et transitive de $\xrightarrow{\tau}$, que l'on notera aussi $\Rightarrow$;
- pour $\alpha = a \neq \tau$, on pose $\stackrel{a}{\Rightarrow} \stackrel{\text{def}}{=} \Rightarrow\xrightarrow{a}\Rightarrow$.

L'intuition est ici que l'on traite les transitions $\xrightarrow{\tau}$ comme invisibles.

On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ entre processus est une *simulation faible* si, pour tout α, dès que $P\mathcal{R}Q$ et $P \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} P'$, il existe Q' tel que $Q \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} Q'$ et $P'\mathcal{R}Q'$.

La *bisimilarité faible*, notée $\approx$, est l'union de toutes les simulations faibles symétriques.

1. Soit la condition

   (SF) si $P\mathcal{R}Q$ et $P \xrightarrow{\alpha} P'$, alors il existe Q' tel que $Q \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} Q'$ et $P'\mathcal{R}Q'$.

   Montrez que $\mathcal{R}$ est une simulation faible si et seulement si (SF).
2. Montrez que si $\mathcal{R}$ satisfait (SF), et si elle satisfait aussi la condition converse, qui dit que dès que $P\mathcal{R}Q$, et si $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$, il existe P' tel que $P \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} P'$ et $P'\mathcal{R}Q'$, alors $\mathcal{R} \subseteq \approx$.

   Au passage, $\mathcal{R}$ est-elle nécessairement symétrique ?

3. *(il n'est pas nécessaire de répondre à cette question pour pouvoir traiter les suivantes)*
   On considère pour cette question le système de transitions étiquetées de CCS [1], où l'ensemble des processus est défini par la grammaire suivante :
   $P \quad ::= \quad 0 \mid a.P \mid \overline{a}.P \mid \tau.P \mid P_1|P_2 \mid P_1 + P_2$
   Les actions sont de la forme $\alpha \quad ::= \quad a \mid \overline{a} \mid \tau$, et la relation de transition est définie par les règles d'inférence suivantes :

$$a.P \xrightarrow{a} P \qquad \overline{a}.P \xrightarrow{\overline{a}} P \qquad \tau.P \xrightarrow{\tau} P \qquad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'} \qquad \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'} \qquad \frac{P \xrightarrow{a} P' \quad Q \xrightarrow{\overline{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$

   (pour chacune des trois dernières règles, la version symétrique est implicitement ajoutée).
   (a) Montrez que pour tout P, on a $P \approx \tau.P$.
   (b) Montrez que si $P \approx Q$, alors pour tout R, on a $P|R \approx Q|R$.
   (c) Est-ce que si $P \approx Q$, alors pour tout R, on a $P + R \approx Q + R$?
   Pour répondre à cette question, vous pouvez utiliser la question 3a.
4. Montrez que la relation $\xleftarrow{\tau}$, définie par $\xleftarrow{\tau} \; = \; (\xrightarrow{\tau})^{-1} \; = \; \{(Q, P) \mid P \xrightarrow{\tau} Q\}$, est incluse dans une simulation faible.
5. On suppose maintenant que la relation $\xrightarrow{\tau}$ termine (forte normalisation), et que l'on a de plus que si $P \xrightarrow{\tau} Q$, alors, pour tout α, dès que $P \xrightarrow{\alpha} P'$, il existe Q' tel que $Q \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} Q'$ et $P' \stackrel{\tau}{\Rightarrow} Q'$ (ou si l'on préfère $P' \Rightarrow Q'$).
   (a) *(plus difficile)* Montrez que $\Rightarrow$ est une simulation faible.
   Pour ce faire, il est fortement conseillé de se fonder sur la définition donnée initialement de ce qu'est une simulation faible (plutôt que sur la caractérisation donnée à la question 1), et de traiter d'abord le cas $\alpha = \tau$, puis le cas $\alpha = a \neq \tau$.
   Pensez au passage au lemme de Newman et à sa preuve.
   (b) On admettra les propriétés suivantes :
   – si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des simulations faibles, alors $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ en est une également ;
   – si $\mathcal{R}$ est une simulation faible, alors sa clôture réflexive et transitive, notée $\mathcal{R}^*$, l'est aussi.
   En déduire que sous les hypothèses précédentes sur $\xrightarrow{\tau}$, on a $\xrightarrow{\tau} \subseteq \approx$.

Après la fin de l'épreuve, un corrigé sera sur le site :
`http://perso.ens-lyon.fr/pierre.lescanne/ENSEIGNEMENT/REECRITURE/`

[1] CCS est le nom de ce système inventé par Robin Milner. Il signifie ici *«Calculus of Communicating Systems»* et non pas *«Code Civil Suisse»*.