Master d'Informatique Fondamentale

Corrigé de l'examen de récriture et bases de la sémantique

Mai 2006

Malgré tout le soin apporté à la rédaction de ce corrigé, l'auteur décline toute responsabilité au cas où une erreur se serait glissée.

Exercice 1

1. On peut envisager deux sytèmes de récriture (au moins). Le première est infini

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0+x & \rightarrow & x \\ s(x)+y & \rightarrow & s(x+y) \\ F_0(x,y) & \rightarrow & x+y \\ n\geq 0 \left\{\begin{array}{r} F_{n+1}(x,0) \\ F_{n+1}(x,y+1) \end{array}\right. & \begin{array}{c}\rightarrow \\ \rightarrow\end{array} & \begin{array}{l} x \\ F_n(F_{n+1}(x,y), F_{n+1}(x,y)+y+1) \end{array} \end{array}\right.$$

Le second introduit un trosième paramètre.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0+x & \rightarrow & x \\ s(x)+y & \rightarrow & s(x+y) \\ F(0,x,y) & \rightarrow & x+y \\ F(s(n),x,0) & \rightarrow & x \\ F(s(n),x,y+1) & \rightarrow & F(n, F(s(n),x,y), s(F(s(n)x,y)+y)) \end{array}\right.$$

2. Par exemple [1], on prouve la terminaison du premier système par un RPO, avec l'arité

$$\Sigma_0 = \{0,1\}, \quad \Sigma_1 = \{s\}, \quad \Sigma_2 = \{+\} \cup \bigcup_{n\geq 0} F_n, \quad \Sigma_{i+3} = \emptyset.$$

et la précédence $...F_{i+1} > F_i > ... > F_O > + > s > 1 > 0$..
La première et la quatrième inégalité proviennent de la propriété de sous-terme. La deuxième provient de $+ > s$ et de $\{\!\{s(x), y\}\!\} >_{rpo,mult} \{\!\{x, y\}\!\}$. La troisième de $F_0 > s$.
La dernière inégalité provient de $F_{n+1} > F_n$ et de

$$\begin{array}{rcl} F_{n+1}(x,y+1) & > & F_{n+1}(x,y) \\ F_{n+1}(x,y+1) & > & F_{n+1}(x,y)+y+1. \end{array}$$

De ces deux inégalités, la première vient de $\{\!\{x, y+1\}\!\} >_{rpo,mult} \{\!\{x, y\}\!\}$ et la deuxième de $F_{n+1} > +$, de $F_{n+1}(x, y+1) > y$ (sous-terme), $F_{n+1} > 1$ et de la première de ces deux inégalités.

Exercice 2

1. *Preuve du si :* On a

$$(P \mathcal{R} Q \wedge P \xrightarrow{\alpha} P') \quad \Longrightarrow \quad (P \mathcal{R} Q \wedge P \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} P') \quad \Longrightarrow \quad (\exists Q' \quad Q \stackrel{\alpha}{\Rightarrow} Q' \wedge P' \mathcal{R} Q')$$

[1] Des méthodes plus sémantiques, sont bien sûr, acceptées.

Preuve du seulement si : On prouve d'abord le résultat quand $\tau = \alpha$, à savoir si $P \mathcal{R} Q$ et $P \overset{\tau}{\Rightarrow} P'$ alors il existe Q' tel que $Q \overset{\tau}{\Rightarrow} Q'$ et $P' \overset{\tau}{\Rightarrow} Q'$. On fait cela par récurrence sur n quand $P(\xrightarrow{\tau})^n P'$.
Pour le cas général, on le voit sur le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dash, "\mathcal{R}"] & P_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dotted, dash, "\mathcal{R}"] & P_2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dotted, dash, "\mathcal{R}"] & P' \arrow[d, dotted, dash, "\mathcal{R}"] \\
Q \arrow[r, dotted, Rightarrow] & Q_1 \arrow[r, dotted, "\alpha"] & Q_2 \arrow[r, dotted, Rightarrow] & Q'
\end{tikzcd}$$

2. Notons que la proposition converse affirme que $\mathcal{R}^{-1}$ est une simulation faible. On voit que $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est une simulation symétrique, donc $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est incluse dans la réunion des simulations symétriques, à savoir $\approx$.
   $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est symétrique, mais rien dit que $\mathcal{R}$ le soit.
3. (a) Considérons la relation $\mathcal{S}$ définie comme $\xleftarrow{\tau} \cup =$. On voit que si $P \mathcal{S} Q$ et $P \xrightarrow{\alpha} P'$, alors $Q \xrightarrow{\tau} \cdot \xrightarrow{\alpha} P'$. On prend donc $Q' = P'$ et on a $Q \overset{\alpha}{\Rightarrow} P'$ et $P' \mathcal{S} P'$. Donc $\mathcal{S}$ est une simulation faible. Donc aussi $\mathcal{S} \subseteq \approx$.
   D'autre part, $P \xleftarrow{\tau} \tau.P$, donc $P \mathcal{S} \tau.P$, donc $P \approx \tau.P$.
   (b) Tout d'abord on remarque que $=$ est une simulation faible symétrique. Donc $= \subseteq \approx$ et donc $\approx$ est réflexive.
   Considérons la relation $(\approx \mid \approx)$ définie par $T_1(\approx \mid \approx)T_2$ si T_1 est de la forme $P|R$ et T_2 de la forme $Q|S$ et $P \approx Q$ et $R \approx S$.
   Cette relation est symétrique par construction.
   C'est une simulation faible, en effet si $T_1(\approx \mid \approx)T_2$ et $T_1 \xrightarrow{\alpha} T_1'$ cela signifie que $T_1 = P|R$, que $T_2 = Q|S$ avec $P \approx Q$ et $R \approx S$ et que $T_1' = P'|R'$ avec $P \xrightarrow{a} P'$ et $R \xrightarrow{\bar{a}} R'$ pour un certain a (on peut inverser le rôle de a et $\bar{a}$). Comme $\approx$ est un simulation faible, on sait qu'il existe Q' avec $Q \xrightarrow{a} Q'$ et $P' \approx Q'$ et il existe S' avec $S \xrightarrow{\bar{a}} S'$ et $S \approx S'$ donc il existe $Q'|S'$ avec $Q|S \xrightarrow{\tau} Q'|S'$ et $P'|R'(\approx \mid \approx)Q'|S'$.
   (c) $a + \tau.b \not\approx a + b$, alors que $\tau.b \approx b$.
4. Il s'agit de montrer que $\xleftarrow{\tau} \cup =$ est une simulation faible, ce qui a été montré à la question 3(a). Donc d'après la question 2.
5. On fait une démonstration par induction sur la relation $\xrightarrow{\tau}$.
   Hypothèse : $P \Rightarrow Q$ et $P \xrightarrow{\alpha} P'$.
   Conclusion : Il existe Q' tel que $Q \overset{\alpha}{\Rightarrow} Q'$ et $P' \Rightarrow Q'$.
   Servons nous de dessins. En fait on va montrer le résultat plus fort, à savoir que :

si
$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"] & P' \arrow[d, dotted, Rightarrow] \\
Q \arrow[r, dotted, Rightarrow, "\alpha"] & Q'
\end{tikzcd}$$
alors
$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & {} \arrow[r, "\alpha"] & {} \arrow[r, Rightarrow] & P' \arrow[d, dotted, Rightarrow] \\
Q \arrow[r, dotted, Rightarrow] & {} \arrow[r, dotted, "\alpha"] & {} \arrow[r, dotted, Rightarrow] & Q'
\end{tikzcd}$$

Si l'on fait $\alpha = \tau$, on voit que $\xrightarrow{\tau}$ est localement confluente. Le dessin suivant montre le schéma d'induction.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau"] & P'' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dotted, Rightarrow] & {} \arrow[r, "\alpha"] & {} \arrow[r, Rightarrow] & P' \arrow[d, dotted, Rightarrow] \\
Q \arrow[r, dotted, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & {} \arrow[r, dotted, Rightarrow] & {} \arrow[r, dotted, "\alpha"] & {} \arrow[r, dotted, Rightarrow] & Q' \arrow[d, dotted, Rightarrow] \\
R \arrow[rr, dotted, Rightarrow] & & {} \arrow[r, dotted, "\alpha"] & {} \arrow[r, dotted, Rightarrow] & R'
\end{tikzcd}$$

On peut invoquer l'hypothèse de récurrence sur le rectangle du dessous, parce que $P \xrightarrow{\tau} Q$ et sur le rectangle de droite parce que $P \xrightarrow{\tau} P''$. Le carré en haut à gauche est la confluence locale.

Il faut aussi vérifier :

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"] & \cdot \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dotted, Rightarrow] & P' \arrow[d, dotted, Rightarrow] & \\
Q \arrow[r, dotted, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[d, Rightarrow] & \cdot \arrow[r, dotted, Rightarrow] & \cdot \arrow[dr, dotted, Rightarrow] & \\
R \arrow[r, dotted, Rightarrow] & \cdot \arrow[r, dotted, "\alpha"] & \cdot \arrow[r, dotted, Rightarrow] & R'
\end{tikzcd}
$$

Le carré en haut à gauche est l'hypothèse. Le carré en haut à droite est la confluence de $\xrightarrow{\tau}$ conséquence par le lemme de Newman de la confluence locale et de la terminaison. Le trapèze est l'hypothèse de récurrence.

6. On a vu que $\xleftarrow{\tau} \cup =$ est un simulation faible, donc sa clôture transitive et réflexive $\Leftarrow$ est aussi une simulation faible.

   On a vu que $\Rightarrow$ est aussi une simulation faible.

   Comme la relation $\Rightarrow$ est confluente, la relation $\Leftarrow \cup \Rightarrow$ est symétrique. C'est une simulation faible.

   Donc d'après la question 2, $(\Leftarrow \cup \Rightarrow) \subseteq \approx$. Donc $\xrightarrow{\tau} \subseteq \approx$ puisque $\xrightarrow{\tau} \subseteq (\Leftarrow \cup \Rightarrow)$.

Pierre Lescanne