

Réécriture

Introduction

dernière mise à jour: *7 février 2006 – 14 h 47*

Qu'est-ce que la réécriture

La réécriture (Certains disent et écrivent la «réécriture».) est la théorie de la simplification qui sert

- ▶ en **calcul symbolique**,
- ▶ en **sémantique**, la valeur d'une expression est son résultat par évaluation, (il y a des liens avec la lambda calcul),
- ▶ en **démonstration automatique**, (il faut «simplifier» à tour de bras !)

Le groupes

Considérons les trois équations de l'axiomatique faible des groupes, on note $*$ le produit, e l'élément neutre et \bar{x} l'inverse de x .

$$x * e = x$$

$$x * \bar{x} = e$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

On veut prouver que $x = e * x$, c'est-à-dire qu'«un élément neutre à droite est aussi un élément neutre à gauche!».

Pour s'y retrouver on utilise les des «flèches», pour orienter les équations.

$$x * e \longrightarrow x$$

$$x * \bar{x} \longrightarrow e$$

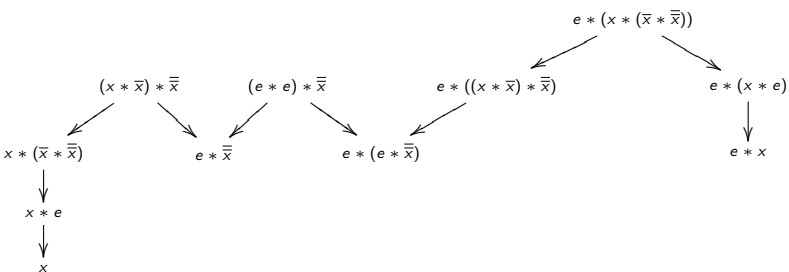
$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z)$$

Pour s'y retrouver on utilise les des «flèches», pour orienter les équations.

$$\begin{aligned}x * e &\longrightarrow x \\x * \bar{x} &\longrightarrow e \\(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z)\end{aligned}$$

😊 Peut-être même que la flèche symbolise une «simplification» !

Preuve de $x = e * x$



La grande question de la réécriture

Comment peut-on automatiser ce processus de démonstration ?

Encore des questions

- ▶ $e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}}))$
- ▶ ou $(e * e) * \bar{\bar{x}}$
- ▶ ou $(x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}}$

se récrivent de plusieurs manières, ils posent un problème pour un simplifieur. Est-on sûr que $e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}})) \rightarrow e * ((x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}})$ simplifie quelque chose ?

Exercice : prouver $e = \bar{x} * x$. On pourra regarder **All that** p. 5.

Encore des questions

Des termes comme comme

- ▶ Y a-t-il une seule forme simplifiée ?
- ▶ Comment orienter les équations ?
- ▶ Les processus de simplification se termine-t-il ?
- ▶ Comment le démontre-t-on ?
- ▶ Sait-on résoudre les équations dans les termes ?
- ▶ Peut-on calculer un système pour la simplification dans les groupes ? Quitte à ajouter de nouvelles règles ?

Un système de «simplification» pour les groupes

$$\begin{array}{lcl} x * e & \longrightarrow & x \\ e * x & \longrightarrow & x \\ x * \bar{x} & \longrightarrow & e \\ \bar{x} * x & \longrightarrow & e \\ \bar{\bar{e}} & \longrightarrow & e \\ \bar{\bar{x}} & \longrightarrow & x \\ \overline{x * y} & \longrightarrow & \bar{y} * \bar{x} \\ (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \\ x * (\bar{x} * y) & \longrightarrow & y \\ \bar{x} * (x * y) & \longrightarrow & y \end{array}$$

Associativité et endomorphisme

Considérons les deux identités :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad (\text{E})$$

Une **première** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x * y) \longrightarrow f(x) * f(y) \quad (\text{E})$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \quad \longrightarrow \quad x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x) * f(y) \quad \longrightarrow \quad f(x * y) \quad (\text{E})$$

$$f(x * y) * z \quad \longrightarrow \quad f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA})$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \quad \longrightarrow \quad x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x) * f(y) \quad \longrightarrow \quad f(x * y) \quad (\text{E})$$

$$f(x * y) * z \quad \longrightarrow \quad f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA})$$

$f(x * y)$ est plus lourd que $f(x)$,

donc $f(x * y) * z$ penche plus à gauche que $f(x) * (f(y) * z)$. C'est une bonne idée pour orienter l'associativité !

Une deuxième façon de simplifier :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z) && \text{(A)} \\ f(x) * f(y) &\longrightarrow f(x * y) && \text{(E)} \\ f(x * y) * z &\longrightarrow f(x) * (f(y) * z) && \text{(EA)} \\ f^2(x * y) * z &\longrightarrow f^2(x) * (f^2(y) * z) && \text{(EEA)}\end{aligned}$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$\begin{aligned}(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z) && \text{(A)} \\ f(x) * f(y) &\longrightarrow f(x * y) && \text{(E)} \\ f(x * y) * z &\longrightarrow f(x) * (f(y) * z) && \text{(EA)} \\ f^2(x * y) * z &\longrightarrow f^2(x) * (f^2(y) * z) && \text{(2EA)} \\ f^3(x * y) * z &\longrightarrow f^3(x) * (f^3(y) * z) && \text{(3EA)} \\ &\vdots && \end{aligned}$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$\begin{array}{lll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad (\text{A}) \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) \quad (\text{E}) \\ f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA}) \\ f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad (\text{2EA}) \\ f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) \quad (\text{3EA}) \\ & \vdots & \\ f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) \quad (\text{nEA}) \\ & \vdots & \end{array}$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$\begin{array}{lll} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad \text{(A)} \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) \quad \text{(E)} \\ f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) \quad \text{(EA)} \\ f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad \text{(2EA)} \\ f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) \quad \text{(3EA)} \\ & \vdots & \\ f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) \quad \text{(nEA)} \\ & \vdots & \end{array}$$

HUM !

Une troisième façon de simplifier :

$$\begin{array}{lcl} (x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \quad (\text{A}) \\ f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) \quad (\text{E}) \\ f(x) * (f(y) * z) & \longrightarrow & f(x * y) * z \quad (\text{EA}) \end{array}$$

Il va falloir comprendre tout ça !

Le plan du cours

- ▶ Les réductions abstraites,
- ▶ Termes et systèmes de réécriture,
- ▶ La terminaison des systèmes de réécriture,
- ▶ La résolution des équations dans les termes ou unification.
- ▶ La complétion,
- ▶ La résolution et/ou les bases de Gröbner.

Bibliographie

Franz Baader et Tobias Nipkow, *Term Rewriting and All that*,
Cambridge University Press, (1998)

Chistoph Hankin, *Lambda calculi : a Guide for the Computer
Scientist*¹, Oxford University Press, (1994)

¹pour ceux qui n'ont pas fait de lambda-calcul, à lire avant d'aborder le chapitre sur l'unification,

Bibliographie

Franz Baader et Tobias Nipkow, *Term Rewriting and All that*,
Cambridge University Press, (1998)

Christoph Hankin, *Lambda calculi : a Guide for the Computer Scientist*¹, Oxford University Press, (1994)

Plus de bibliographie

Enno Ohlebusch, *Advanced Topics in Term Rewriting*,
Springer-Verlag, (2002).

Terese, *Term Rewriting Systems*, Cambridge University Press,
(2003)

¹pour ceux qui n'ont pas fait de lambda-calcul, à lire avant d'aborder le chapitre sur l'unification,