

Réécriture

Algèbres de termes

version du 21 février 2006 – 19h 57

L'ordre *prefix*

L'ordre *prefix* est défini sur les mots de A^* par.

α *prefix* β si et seulement $(\exists \gamma \in A^*) \alpha \gamma = \beta$.

Domaine d'un arbre enraciné étiqueté

$$\mathbb{N}_* = \mathbb{N} - \{0\}$$

$$\mathbb{N}_*^* = (\mathbb{N} - \{0\})^* \text{ les suites finies de naturels positifs.}$$

Un **domaine d'arbre** est un sous-ensemble fini non vide D de \mathbb{N}_*^* tel que :

- $p \in D$ & q **prefix** $p \Rightarrow q \in D$
- $pi \in D$ & $j \in \mathbb{N}_*$ & $j < i \Rightarrow pj \in D$

REMARQUE : Tout domaine contient le mot vide.

Arbre enraciné étiqueté

Un **arbre étiqueté** par A est une application $T : D \rightarrow A$:

- $T(\epsilon)$ est la **racine** de l'arbre.
- D est le **domaine** (ou l'ensemble des **positions**) de T noté $Pos(T)$.
- $T(p)$ s'appelle l'**étiquette** à la position p .
- Si $p \in Pos(T)$ et $(\forall i \in \mathbb{N}_*) pi \notin Pos(T)$, alors p est une **feuille** de T .

Soit TT tel que $Pos(TT) = \{\epsilon, 1, 2, 21, 22, 221, 222\}$ et :

$$\epsilon \mapsto +$$

$$1 \mapsto x$$

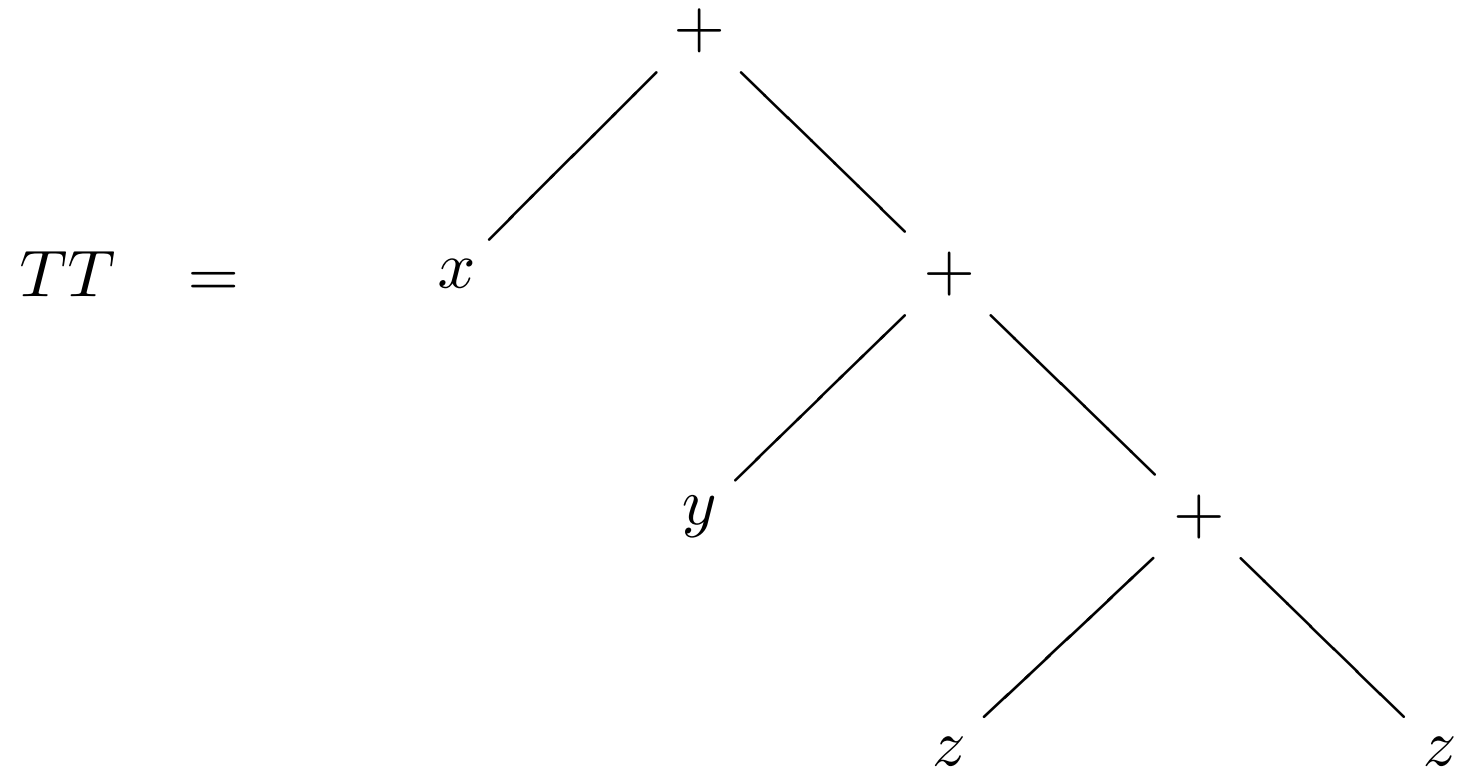
$$2 \mapsto +$$

$$21 \mapsto y$$

$$22 \mapsto +$$

$$221 \mapsto z$$

$$222 \mapsto z$$



Sous-arbre

$T|_p$ est le **sous-arbre à la position p** défini par $T|_p(q) = T(pq)$
où $Pos(T|_p) = \{q \mid pq \in Pos(T)\}$.

EXERCICE : Décrivez $Pos(TT|_{22})$ et $TT|_{22}$.

FAIT : $(T|_p)|_q = T|_{pq}$.

Remplacement

$T[U]_p$ est le **remplacement** du sous-arbre de T à la position p par l'arbre U , on le définit par

$$Pos(T[U]_p) = \{q \in Pos(T) \mid \neg(p \text{ prefix } q)\} \cup \{pp' \mid p' \in Pos(U)\}$$

et

$$T[U]_p(q) = \begin{cases} T(q) & \text{si } \neg(p \text{ prefix } q) \\ U(p') & \text{si } q = pp' \text{ avec } p' \in Pos(U) \end{cases}$$

EXERCICE : Soit $UU = TT[TT]_{21}$.

- Que vaut $UU(212)$?
- Dessinez UU .

RÉSULTATS :

- $T[U[V]_q]_p = T[U]_p[V]_{pq}$.
- $T[U]_p[V]_q = T[V]_q[U]_p$ si p et q sont étrangers^a

^a p et q sont dits **étrangers**, si p n'est pas préfixe de q et si q n'est pas préfixe de p .

Sous-arbre d'un remplacement

- Si p et q sont étrangers, alors $(T[U]_p)|_q = T|_q$.
- $(T[U]_p)|_{pp'} = U|_{p'}$.
- $(T[U]_{pp'})|_p = (T|_p)[U]_{p'}$.

Signature

Une **signature** est une famille d'ensembles $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$$

Si $f \in \Sigma_n$, f est dit d'**arité** n .

Σ_0 est l'ensemble des **constantes**.

Termes

Soit X un ensemble dit ensemble des **variables**.

Quelques définitions :

- * Un **Σ -terme** sur X est un arbre t étiqueté par $\Sigma \cup X$, tel que
 - Si $t(p) \in X$ alors p est une feuille.
 - Si $t(p) \in \Sigma_n$ alors
 - $pn \in Pos(t)$ (donc $i \leq n$ & $i \in \mathbb{N}_* \Rightarrow pi \in Pos(t)$)
 - et $p(n + 1) \notin Pos(t)$.
- * $T(\Sigma, X)$ est l'ensemble des **Σ -termes** sur X .
- * $Var(t) = \{x \in X \mid (\exists p \in Pos(t)) t(p) = x\}$

FAIT : Si $t(p) \in \Sigma_0$ alors p est une feuille.

Σ -algèbres

Une Σ -algèbre est un couple $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$ où A est un ensemble dit **support** de l'algèbre,

$$\Sigma^{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n^{\mathcal{A}}$$

et $f^{\mathcal{A}} \in \Sigma_n^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$.

Σ -algèbres libres

$T(\Sigma, X)$ munie des opérations d'**enracinement** est une algèbre.

Si $t_1 \dots t_n$ sont Σ -termes sur X et $f \in \Sigma_n$

on définit le terme $f(t_1, \dots, t_n)$ obtenu

en enracinant f sur t_1, \dots, t_n par

- $Pos(f(t_1, \dots, t_n)) = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^n iPos(t_i)$
- $f(t_1, \dots, t_n)(\varepsilon) = f$
- $f(t_1, \dots, t_n)(ip) = t_i(p)$.

On dit que $T(\Sigma, X)$ est l'**algèbre libre** sur X .

$T(\Sigma) = T(\Sigma, \emptyset)$ est l'**algèbre initiale**.

Algèbre initiale et induction structurelle

Pour prouver une propriété $(\forall t \in T(\Sigma)) P(t)$ dans une algèbre initiale $T(\Sigma)$ on utilise l'induction structurelle.

$$\frac{(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall f \in \Sigma_n) (\forall t_1 \in T(\Sigma)) \dots (\forall t_n \in T(\Sigma)) \\ (\bigwedge_{i=1}^n P(t_i) \Rightarrow P(f(t_1, \dots, t_n)))}{(\forall t \in T(\Sigma)) P(t)}$$

Algèbre initiale et induction structurelle

Autrement dit :

Pour vérifier une propriété sur toute l'algèbre initiale,
il faut vérifier que pour chaque opérateur f d'arité n
la propriété se transpose des termes t_i
vers le terme $f(t_1, \dots, t_n)$.

Algèbre initiale et induction structurelle

Par exemple,

si $\Sigma_0 = \{\text{nil}\}$, $\Sigma_2 = \{\cdot\}$, $\Sigma_i = \emptyset$ pour $i = 1$ ou $i \geq 3$,

l'induction structurelle est

$$\frac{P(\text{nil}) \wedge (\forall t_1, t_2 \in T(\text{nil} \uplus \cdot))(P(t_1) \wedge P(t_2) \Rightarrow P(t_1 \cdot t_2))}{(\forall t \in T(\text{nil} \uplus \cdot)) P(t)}$$

Morphismes

Un **morphisme** $\varphi : T(\Sigma, X) \rightarrow A$ est une application telle que

- $\varphi(x_i) = a_i$
- $\varphi(f(t_1, \dots, t_n)) = f^A(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n))$.

Substitutions, domaine, codomaine

Soit X un ensemble dénombrable de variables.

* Une **substitution** est une application $\sigma : X \rightarrow T(\Sigma, X)$ qui est l'identité presque partout (c-à-d sauf sur un ensemble fini).

* On note : $Dom(\sigma) = \{x \in X \mid x \neq \sigma(x)\}$
le **domaine**.

* On note :

$$Range(\sigma) = \bigcup_{\sigma(x) \neq x} Var(\sigma(x)) = \{y \in Var(\sigma(x)) \mid x \neq \sigma(x)\}$$

le **codomaine**.

Substitutions, domaine, codomaine

On **étend** σ à $T(\Sigma, X)$ en une application $\hat{\sigma}$ (souvent notée σ).

- $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$,
- $\hat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$.

$Sub(T(\Sigma, X))$ est l'ensemble des substitutions.

Identités et réduction

- * Une **identité** $g \approx d$ est un couple, c'est-à-dire un élément de $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.
- * Soit E un ensemble d'identités, la **contraction** \xrightarrow{E} est définie par

$$s \xrightarrow{E} t$$

ssi

$$(\exists g \approx d \in E)(\exists \sigma \in \text{Sub}(T(\Sigma, X)))(\exists p \in \text{Pos}(s))$$

et

$$s|_p = \sigma(g) \quad \& \quad t = s[\sigma(d)]_p.$$

Systemes de réécriture

D'autres définitions :

- Une **règle de réécriture** est une identité $g \approx d$ telle que $Var(g) \supseteq Var(d)$.
On écrit $g \rightarrow d$.
- Un **système de réécriture** est un ensemble de règles de réécriture.
- Un **redex** de s est une instance (c'est-à-dire un sous-terme de s de la forme $\sigma(g)$ pour $\sigma \in Sub(T(\Sigma, X))$) d'un membre gauche de règle de réécriture $g \rightarrow d$.
- **Contracter le redex** $s|_p$ à la position p ,
c'est passer de $s = s[\sigma(g)]_p$ à $t = s[\sigma(d)]_p$.