Réécriture

Unification

version du 4 novembre 2004 – 09 h 32

La problème de l’unification

Jacques Herbrand

Équation

Le but de l'unification est de résoudre des équations.

Un problème équationnel est un ensemble fini de paires [a] de termes :

$$P = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$$

[a] Attention il s'agit bien de paires et pas de couples !

Équation

Le but de l'unification est de résoudre des équations.

Un problème équationnel est un ensemble fini de paires [a] de termes :

$$P = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$$

$s_i \stackrel{?}{=} t_i$ est une équation

[a] Attention il s'agit bien de paires et pas de couples !

Convention

Si t_i dans $s_i \stackrel{?}{=} t_i$ est une variable x_i,

on écrira plutôt $x_i \stackrel{?}{=} s_i$ que $s_i \stackrel{?}{=} x_i$!

La variable isolée, si elle existe est toujours à gauche.

Solution

Une solution de P ou un unificateur de P est une substitution σ telle que

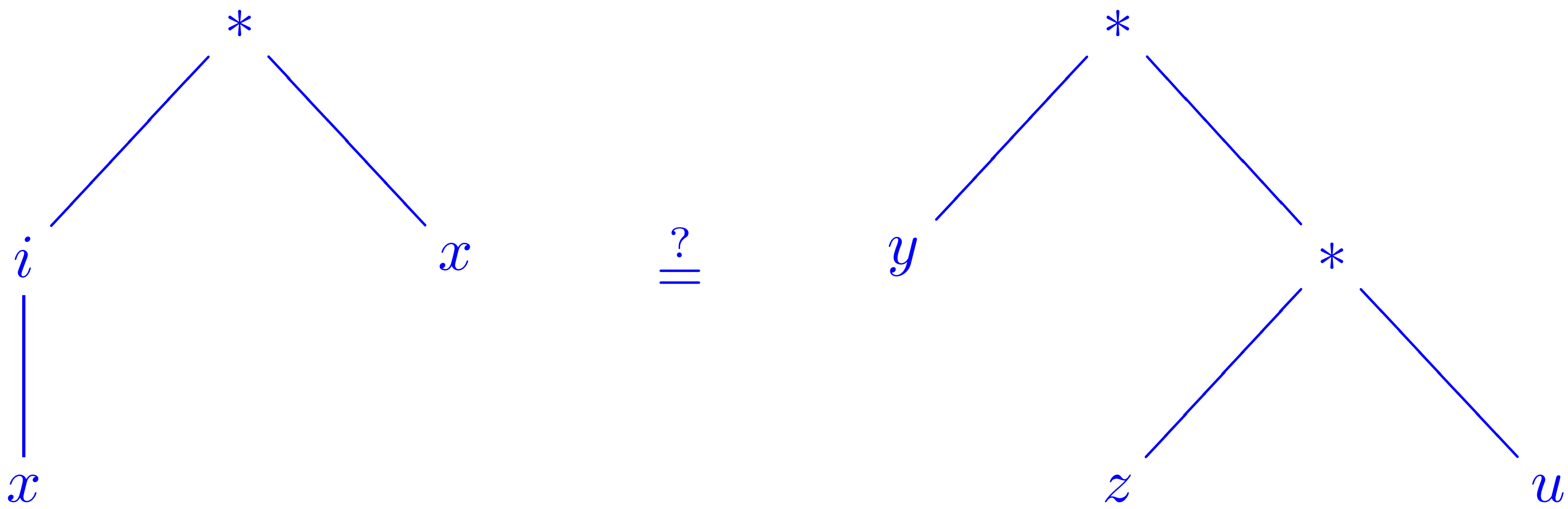
$$\sigma(s_1) = \sigma(t_1)$$
$$\vdots$$
$$\sigma(s_n) = \sigma(t_n)$$

L'ensemble des unificateurs de P est noté $\mathcal{U}(P)$.

Si $\mathcal{U}(P) \neq \emptyset$ on dit que P est unifiable.

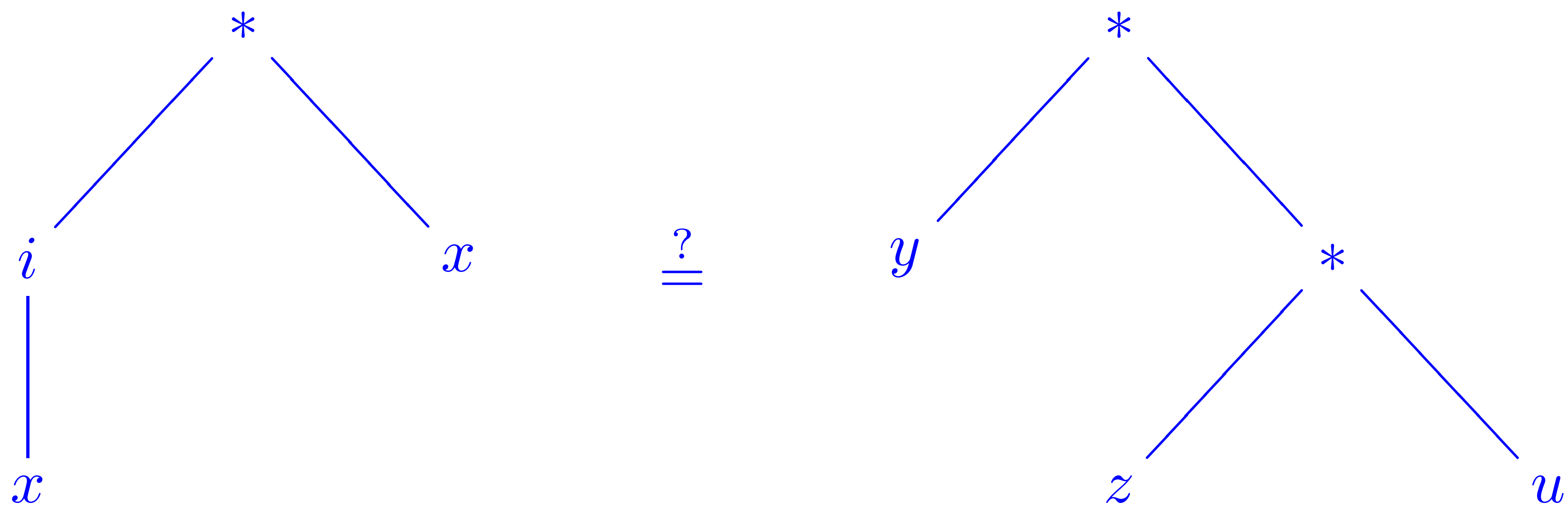
Exemple 1

Soit le problème :



Exemple 1

Soit le problème :



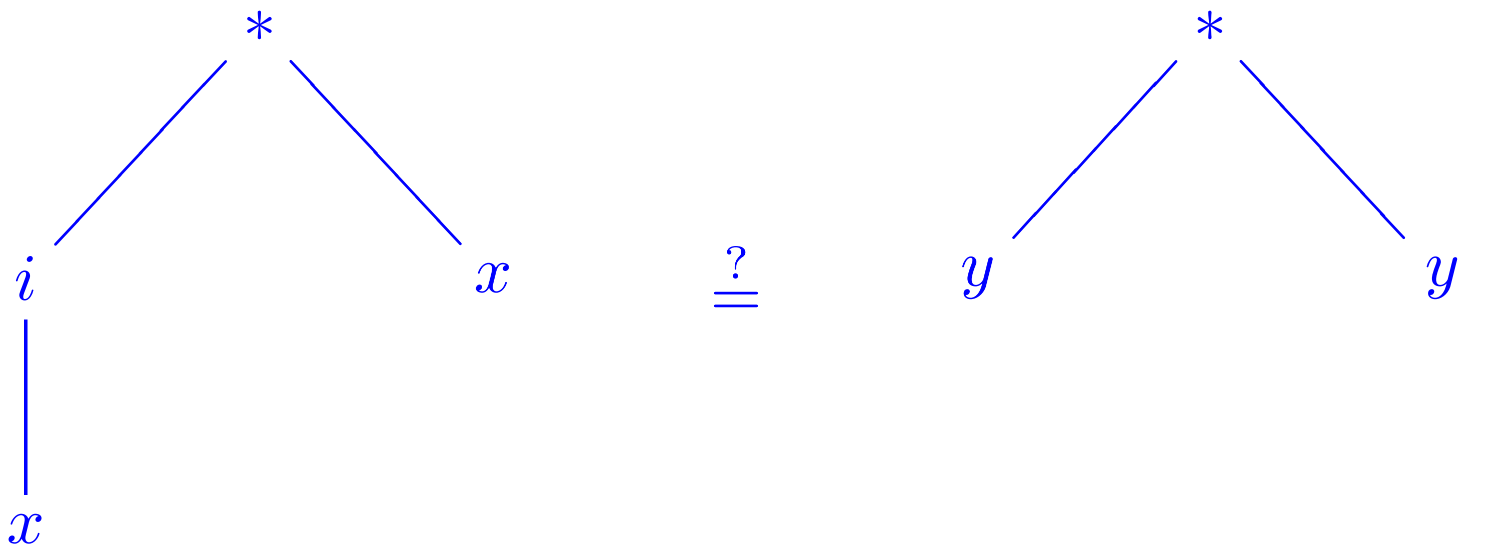
Les substitutions

$$\{x \mapsto i(u) * u, \quad y \mapsto i(i(u) * u), \quad z \mapsto i(u)\}$$

$\{x \mapsto z * u, \quad y \mapsto i(z * u)\}$ sont chacune des solutions.

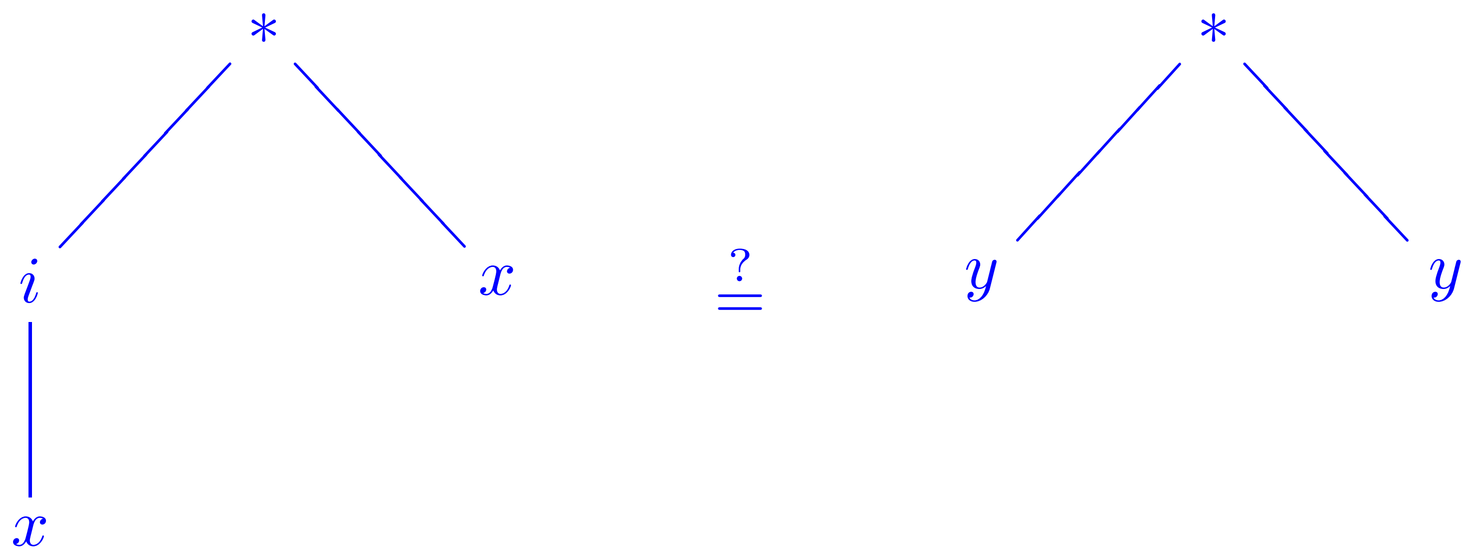
Exemple 2

Le problème :



Exemple 2

Le problème :



n'a pas de solution, car il faudrait que $\sigma(x) = i(\sigma(x))$.

Ce qui est impossible.

Ordre sur les substitutions

L'ensemble $Sub(T(\Sigma, V))$ est muni d'un ordre $\lesssim$ défini par

$$\sigma \lesssim \tau \text{ si et seulement si } (\exists \rho \in Sub(T(\Sigma, V)) \quad \tau = \rho\sigma.$$

σ est dite plus générale que τ.

MGU

L'unificateur le plus général de P (ou mgu) est une substitution σ telle que

1. σ est un unificateur de P, c-à-d $\sigma \in \mathcal{U}(P)$.
2. Si $\theta \in \mathcal{U}(P)$ alors $\sigma \lesssim \theta$.

Forme résolue

Soit P un problème contenant $x \stackrel{?}{=} t$.

$x \stackrel{?}{=} t$ est en forme résolue dans P si x n'apparaît nulle part ailleurs dans P.

En particulier,

- $x \notin Var(t)$
- et il n'y a pas d'autre équation de la forme $x \stackrel{?}{=} s$.

x est alors dite résolue.

Un problème est résolu si toutes ses équations sont en forme résolue.

Si $P = \{x_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., x_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ est résolu,

alors $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$ est un mgu de P.

On note σ_P

au lieu de $\{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$

Si $P = \{x_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., x_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ est résolu,

alors $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$ est un mgu de P.

Démonstration :

σ est un unificateur de P.

Pour $1 \leq i \leq n$, $Var(t_i) \cap \{x_1, ..., x_n\} = \emptyset$, car P est résolu.

Il s'en suit que $\sigma(t_i) = t_i$, car en plus pour $y \notin \{x_1, ..., x_n\}$

on a $\sigma(y) = y$.

Donc nous déduisons $\sigma(x_i) = t_i = \sigma(t_i)$, ce qui prouve que σ est un unificateur de P.

σ est minimal.

Soit τ un unificateur.

On a $\tau(x_i) = \tau(t_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Donc aussi $\tau(x_i) = \tau(\sigma(x_i))$.

Si $y \notin \{x_1, ..., x_n\}$, alors $\sigma(y) = y$ et $\tau(y) = \tau(\sigma(y))$.

Donc $\tau = \tau\sigma$, ce qui prouve que σ est un unificateur minimal (c'est-à-dire un mgu).

On notera qu'on aussi montré que σ est le seul mgu, puisqu'en fait, tout unificateur est comparable à σ et plus «grand» que lui.

Unification par transformation

Transformations

Chaque transformation est écrite comme une règle d'inférence

$$R \quad \frac{P_{\text{avant}}}{P_{\text{après}}}$$

Transformations

$$\mathit{Supprime} \quad \frac{\{u \stackrel{?}{=} u\} \cup P}{P}$$

$$\mathit{Decompose} \quad \frac{\{f(u_1, ..., u_n) \stackrel{?}{=} f(v_1, ..., v_n)\} \cup P}{\{u_1 \stackrel{?}{=} v_1, ..., u_n \stackrel{?}{=} v_n\} \cup P} \quad f \in \Sigma_n$$

$$\mathit{Elimine} \quad \frac{\{x \stackrel{?}{=} v\} \cup P}{\{x \stackrel{?}{=} v\} \cup \sigma(P)}$$

où $x \stackrel{?}{=} v$ n'est pas en forme résolue dans $\{x \stackrel{?}{=} v\} \cup P$
et $x \notin Var(v)$ et $\sigma = \{x \mapsto v\}$.

Succès et échec

Si P est résolu, aucune règle ne s'applique (succès).

Ça n'est pas le seul cas d'arrêt. Les autres cas sont des échecs.

– S'il existe une équation de la forme $f(u_1, ..., u_m) \stackrel{?}{=} g(v_1, ..., v_n)$ avec $f \neq g$, on dit qu'il y a clash.
– S'il existe une équation de la forme $x \stackrel{?}{=} v$ avec $v \in Var(\sigma)$ on dit qu'il y a un cycle.

Résoudre par transformation

Si P' est obtenu à partir de P par application de l'une des règles, on écrit

$$P \Mapsto P'$$

Résoudre par transformation

Si P' est obtenu à partir de P par application de l'une des règles, on écrit

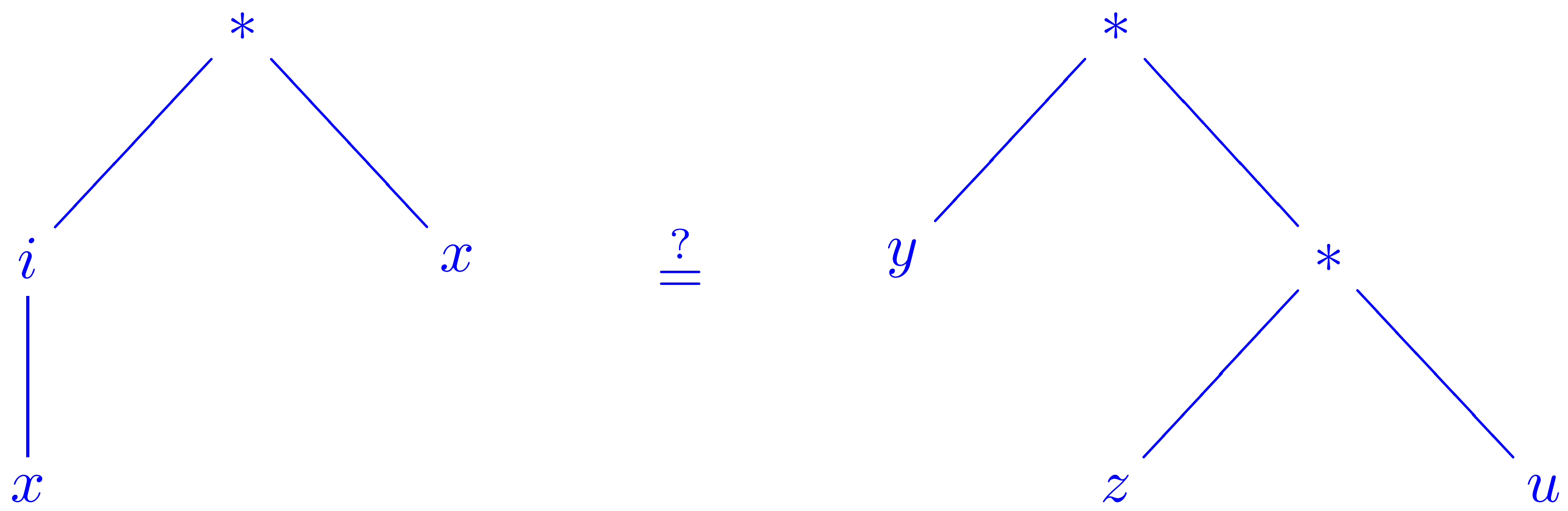
$$P \Mapsto P'$$

Cette méthode à des liens avec l'élimination de Gauss.

On simplifie par Supprime et Decompose et on élimine par Elimine.

Exercice

Appliquer les règles à :



$\boxed{\text{Préservation des unificateurs : Si } P \Mapsto P' \text{ alors } \mathcal{U}(P) = \mathcal{U}(P').}$

Préservation des unificateurs : Si $P \Mapsto P'$ alors $\mathcal{U}(P) = \mathcal{U}(P')$.

La seule difficulté est Elimine.

Posons $P = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$.

Supposons $x \stackrel{?}{=} v \cup P \Mapsto x \stackrel{?}{=} v \cup \sigma(P)$

où $x \stackrel{?}{=} v$ n'est pas en forme résolue et $x \notin Var(v)$

et $\sigma = \{x \mapsto v\}$.

Soit τ telle que $Dom(\tau) \cap Range(\tau) = \emptyset$, alors $\tau\tau = \tau$,

on dit que τ est idempotente.

On voit que si les unificateurs idempotents sont préservés,

alors tous les unificateurs sont préservés [a].

Soit τ idempotente telle que $\tau(x) = \tau(v)$,

– alors $\tau = \tau\sigma$,

– et dans le problème P, pour chaque i on a

$\tau(s_i) = \tau\sigma(s_i) = \tau\sigma(t_i) = \tau(t_i)$.

Donc $\tau \in \mathcal{U}(x \stackrel{?}{=} v \cup P)$ si et seulement si $\tau \in \mathcal{U}(x \stackrel{?}{=} v \cup \sigma(P))$.

Par conséquent $\mathcal{U}(x \stackrel{?}{=} v \cup P) = \mathcal{U}(x \stackrel{?}{=} v \cup \sigma(P))$.

[a] En effet, un unifi cateur non idempotent est obtenu par renommage de variables à partir d'un unifi cateur idempotent.

$\boxed{\text{Correction : Si } P \overset{*}{\Rightarrow} P' \text{ et } P' \text{ est résolu alors } mgu(P) = \sigma_{P'}.}$

Correction : Si $P \overset{*}{\Mapsto} P'$ et P' est résolu alors $mgu(P) = \sigma_{P'}$.

On combine les deux lemmes précédents.

$\mathcal{U}(P) = \mathcal{U}(P')$ donc $mgu(P) = mgu(P')$.

Or $mgu(P') = \sigma_{P'}$. c.q.f.d.

Complétude : Si P est unifiable alors il existe P' tel que

- $P \overset{*}{\Longmapsto} P'$,
- P' est résolu.

Complétude : Si P est unifi able alors il existe P' tel que

- $P \overset{*}{\Rrightarrow} P'$,
- P' est résolu.

Soit (P_i) une suite telle que $P_0 = P$ et $P_i \Rrightarrow P_{i+1}$.

On veut montrer qu'il existe n tel que P_n est résolu.

Si P_i n'est pas résolu, alors

- si P_i ne contient pas de variable x non résolue, il contient une équation $s = t$ décomposable, alors Decompose s'applique.
- si P_i contient une équation triviale $x \overset{?}{=} x$ alors Supprime s'applique.
- si P_i contient une équation non résolue $x \overset{?}{=} t$ avec $x \notin Var(t)$, alors Elimine s'applique.

Complétude : Si P est unifi able alors il existe P' tel que

- $P \overset{*}{\Rrightarrow} P'$,
- P' est résolu.

Soit (P_i) une suite telle que $P_0 = P$ et $P_i \Rrightarrow P_{i+1}$.

On veut montrer qu'il existe n tel que P_n est résolu.

Si P_i n'est pas résolu, alors

- si P_i ne contient pas d'équation $x \overset{?}{=} v$ non résolue, il contient une équation $s = t$ décomposable, alors Decompose s'applique.
- si P_i contient une équation triviale $x \overset{?}{=} x$ alors Supprime s'applique.
- si P_i contient une équation non résolue $x \overset{?}{=} t$ avec $x \notin Var(t)$, alors Elimine s'applique.

Si P_i n'est pas résolu et est unifi able alors le processus peut continuer.

Complétude : Si P est unifi able alors il existe P' tel que

- $P \overset{*}{\Mapsto} P'$,
- P' est résolu.

Le processus s'arrête.

En effet, si l'on attache à chaque P_i le triplet (n_v, n_f, n_e) où

- n_v est le nombre de variables non résolues,
- n_f est le nombre de symboles fonctionnels,
- et n_e est le nombre d'équations.

Chaque règle diminue cette quantité suivant l'ordre lexicographique.

En effet,

La règle Supprime

- diminue le nombre de variables non résolues n_v (cas où la suppression de $x \stackrel{?}{=} x$ rend la variable x résolue),
- ou si elle ne diminue pas le nombre de variables non résolues, elle diminue le nombre n_f de symboles fonctionnels (cas où u contient au moins un symbole fonctionnel),
- sinon elle diminue le nombre d'équations n_e.

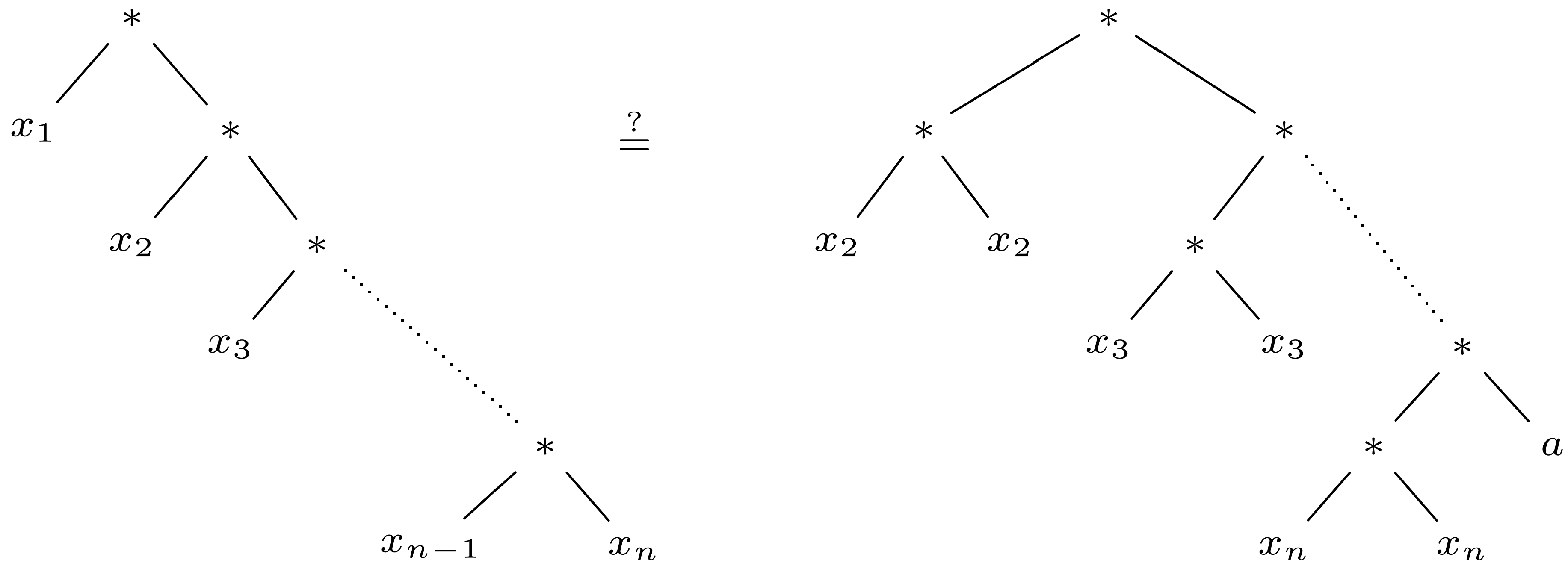
La règle Decompose

- diminue le nombre de variables non résolues n_v (cas où l'un des $u_i \stackrel{?}{=} v_i$ est de la forme $x \stackrel{?}{=} t$ et où x est résolue),
- ou si elle ne diminue pas le nombre de variables non résolues, elle diminue le nombre n_f de symboles fonctionnels.

La règle Elimine

– diminue le nombre n_v de variables non résolues.

L’unification peut être exponentielle en la taille du problème originel.



Par un succession de Decompose on obtient la (forme triangulaire)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 * x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_n * x_n \\ x_n &= a \end{aligned}$$

Puis par une succession de Elimine

$$\begin{aligned}
x_1 &= (\ldots((a * a) * (a * a))\ldots * ((a * a) * (a * a))\ldots) \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= (a * a) * (a * a) \\
x_{n-1} &= (a * a) \\
x_n &= a
\end{aligned}$$

Moralité

Pour une bonne efficacité, il faut utiliser la règle Elimine de façon paresseuse.

Il faut préférer

– une forme triangulaire

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & t(x_2, \ldots, x_n) & \\ & \vdots & & \\ x_{n-1} & = & t(x_n) & \\ x_n & = & t_n & \qquad Var(t_n) = \emptyset \end{array}$$

– ou une représentation par pointeurs

qui ne sont que des manières «indirectes»

de représenter les fonctions.