Master d'Informatique Fondamentale

Examen de récriture

Janvier 2005

Documents autorisés

Exercice 1

Un système de récriture R sur une signature Σ est *interréduit* si
(i) aucun membre droit de R n'est réduit par une règle de R,
(ii) aucun membre gauche l d'une règle $l \to r$ de R n'est réductible par une règle de $R \setminus \{l \to r\}$.

1. Montrer que si un système de récriture est convergent, interréduit et inclus dans l'ordre de réduction $>$ (c'est-à-dire $s \xrightarrow[R_E]{} t$ implique $s > t$), alors chaque membre droit r d'un règle $l \to r$ est l'élément minimum pour $>$ de sa classe d'équivalence modulo E (c'est-à-dire que $r = \min[r]_E$).
2. Montrer qu'étant donné un ensemble d'équations E et un ordre de réduction $>$, il existe au plus un seul système de récriture convergent et interréduit R_E qui lui est équivalent. Plus précisément cela signifie que
   - R_E est convergent et interréduit,
   - $s \xrightarrow[R_E]{} t$ implique $s > t$,
   - pour tous termes s et t de $T(\Sigma, X)$ on a

   $$s =_E t \quad \text{si et seulement si} \quad s \xrightarrow[R_E]{*} \cdot \xleftarrow[R_E]{*} t.$$
3. Montrer sans complétion que le résultat d'une complétion du système

   $$E = \left\{ \begin{array}{rcl} f(g(h(x))) & = & g(x) \\ g(h(g(x))) & = & g(g(h(x))) \\ f(g(g(x))) & = & f(g(x))) \\ h(h(x)) & = & h(x) \end{array} \right.$$

   donne le système

   $$R = \left\{ \begin{array}{rcl} f(g(x)) & \to & g(x) \\ h(h(x)) & \to & h(x) \\ g(h(x)) & \to & g(x) \\ g(g(x)) & \to & g(x) \end{array} \right.$$

   Indiquer l'ordre de réduction utilisé. *N. B. : Bien que l'on n'utilise pas la complétion, il peut être utile de savoir calculer des paires critiques.*

Tourner la page

Exercice 2 *(l'ordre de décomposition)*

On note $\vec{t}$ une liste de termes. La liste des termes à la position p est définie comme suit :
- $f\vec{t}\,\nabla\,\epsilon \triangleq \vec{t}$,
- $f\vec{t}\,\nabla\,i\,p \triangleq t_i \nabla p$.

Par définition, un *chemin* p de t est une position terminale dans $Pos(t)$, c'est-à-dire une position telle que $p\,1 \notin Pos(t)$.

La *décomposition élémentaire* de t à la position p est définie par

$$edec(t,p) \quad = \quad \langle t(p), t\ \nabla\ p\rangle.$$

La *décomposition composite* le long du chemin p est définie par

$$pdec(t,p) \quad = \quad \{edec(t,q) \mid q \leq p\}.$$

La *décomposition* du terme t est définie comme

$$dec(t) \quad = \quad \{pdec(t,p) \mid p \text{ chemin de } t\}.$$

On suppose que l'on s'est donné un ordre $<$ sur la signature Σ, dit *précédence*, auquel on ajoute $x\#f$ (x est incomparable avec f) pour $x \in Var$ et $f \in \Sigma$. L'*ordre de décomposition* s'écrit $<_d$ et est défini comme le plus petit ordre qui satisfait les conditions suivantes :
- L'ordre $<_{ed}$ sur les décompositions élémentaires est défini par

$$\langle f, \vec{s}\rangle <_{ed} \langle g, \vec{t}\rangle \qquad \text{si et seulement si} \qquad (f < g) \quad \vee (f = g \wedge \vec{s} <_d^{lex} \vec{t}).$$

- L'ordre $<_{pd}$ sur les décompositions composites est défini comme l'extension aux ensembles[1] de l'ordre $<_{ed}$.
- L'ordre sur les décompositions $<_{dec}$ est défini comme l'extension multiensemble de l'ordre $<_{pd}$.
- L'ordre de décomposition $<_d$ est défini par $s <_d t$ si et seulement si $dec(s) <_{dec} dec(t)$.

1. Montrer que si $t_{|p} = f\vec{s}$ alors $t\ \nabla\ p = \vec{s}$.
2. Posons $\Sigma_1 \triangleq \{suc, +, 0\}$ avec les arités habituelles et la précédence $suc < +$. On pose $t_1 \triangleq suc(x) + y$ et $t_2 \triangleq suc(x + y)$.
   Donner $pdec(t_1, 11)$, $pdec(t_1, 2)$, $dec(s)$, ainsi que $pdec(t_2, 11)$, $pdec(t_2, 12)$ et $dec(t_2)$.
   Comparer t_1 et t_2 par $<_d$.
3. Montrer que si la précédence $<$ termine, l'ordre $<_d$ termine.
4. Montrer que $<_d$ contient $<_{lpo}$, autrement dit que $\qquad s <_{lpo} t \qquad \Rightarrow \qquad s <_d t$.
5. Comparer $x * h(x * y)$ et $h(h(x) * y)$ par $<_{lpo}$ et $<_d$ pour une précédence où h et $*$ sont incomparables.
6. L'ordre de clôture est l'ordre $<_c$ défini par

   $s <_c t$ si set seulement si pour toute précédence $\prec$ totale qui contient $<$ on a $s \prec_{lpo} t$.

   Montrer que $<_c$ contient $<_d$.
7. Montrer les inclusions suivantes d'ordre :

$$\triangleleft \subset \blacktriangleleft \subset \underset{\mathcal{EMB}}{\longleftarrow} \subset <_{lpo} \subset <_d \subset <_c$$

   où $\triangleleft$ est l'ordre sous-terme et les autres ont été soit définis en cours, soit définis plus haut.
   Montrer par des contre-exemples que toutes les inclusions sont strictes.

[1] Cas particulier des multiensembles.