Magistère d'Informatique et Modélisation

Réériture - TD n°6

15 Mars 2002

Unification

Exercice 1 *l'algorithme d'unification de Martelli-Montanari*

On suppose que la signature n'est constituée que d'une constante c et d'un symbole dyadique f, c-à-d d'arité 2.

Dans la suite, un multiensemble comme $a \mapsto 1, b \mapsto 2$ et $c \mapsto 0$ pour tout autre elément c est noté $\{\!\{a, b, b\}\!\}$. L'ensemble vide est noté $\emptyset$ et le multiensemble vide est noté $\{\!\{\ \}\!\}$. Une *multi-équation* est un couple (X, M) où X est un ensemble de variables et M est un multiensemble de termes qui ne sont pas des variables. Un *problème multi-équationnel* est un ensemble de multi-équations. Si (s, t) est une paire de termes qui ne sont pas des variables et que l'on veut unifier, on lui associe le problème multi-équationnel $\{(\Xi, \Pi)\}$ où $\Xi = \{\xi\}$, où $\Pi = \{\!\{s, t\}\!\}$ et où ξ est une variable qui n'apparaît ni dans s ni dans t (introduite d'ailleurs uniquement par commodité). Par exemple, si on doit unifier $x + y = x + (z + z)$, on considérera le problème multi-équationnel $\{(\{\xi\}, \{\!\{x + y, x + (z + z)\}\!\})\}$.

On définit trois règles :

$$Net \quad \frac{(\{x\}, \{\!\{\ \}\!\}) \cup E}{E}$$

$$Fus \quad \frac{(X, M) \cup (X', M') \cup E}{(X \cup X', M \cup M') \cup E} \quad \text{si } X \cap X' \neq \emptyset$$

$$Dec \quad \frac{(X, M \cup \{\!\{s, t\}\!\}) \cup E}{(X, M \cup \{\!\{Com(s, t)\}\!\}) \cup Muleq(s, t) \cup E} \quad \text{si } Muleq(s, t) \text{ est défini.}$$

Si s et t sont deux termes, $Muleq(s, t)$ est l'ensemble des multi-équations issues de s et t et $Com(s, t)$ est la partie commune de s et t. Ils sont définis comme suit. Dans les définitions, tt est un terme qui n'est pas une variable et x et y sont des variables.

$$\begin{aligned}
Muleq(f(s_1, s_2), f(t_1, t_2)) &= Muleq(s_1, t_1) \cup Muleq(s_2, t_2) \\
Muleq(c, c) &= \emptyset \\
Muleq(x, tt) &= (\{x\}, \{\!\{tt\}\!\}) \\
Muleq(tt, x) &= (\{x\}, \{\!\{tt\}\!\}) \\
Muleq(x, y) &= (\{x\} \cup \{y\}, \{\!\{\ \}\!\})
\end{aligned}$$

Si $Muleq(s,t)$ n'apparaît dans aucun des cas ci-dessus, $Muleq(s,t)$ n'est pas défini.

$$\begin{array}{rcl} Com(f(s_1,s_2),f(t_1,t_2)) & = & f(Com(s_1,t_1),Com(s_2,t_2)) \\ Com(c,c) & = & c \\ Com(x,tt) & = & x \\ Com(tt,x) & = & x \\ Com(x,y) & = & x \end{array}$$

Si $Com(s,t)$ n'apparaît dans aucun des cas ci-dessus, $Com(s,t)$ n'est pas défini.

1. On définit deux termes $a = f(x, f(x,c))$ et $b = f(f(c,c), f(x,y))$. Calculez $Muleq(a,b)$ et $Com(a,b)$.
2. «Unifiez» par cette méthode $f(f(x, f(x,c)), f(f(c,c), f(x,y))) = f(z,z)$. En d'autres termes, mettez l'équation sous la forme (Ξ, Π) ci-dessus et appliquez les règles de transformation, jusqu'à ce que plus aucune ne s'applique.
3. Donnez et discutez les cas d'arrêt par échec de l'algorithme.
4. Étant donné un problème multi-équationnel E, on définit sur les variables une relation $x \lessdot_E y$ s'il existe une multi-équation $(X,M) \in E$ et un terme $t \in M$ tels que $x \in X$ et $y \in Var(t)$. Définissez les formes résolues. Quelle est la substitution que vous associeriez à chacune de ces formes résolues.
5. Décrivez $\lessdot_E$ pour le problème multi-équationnel E résultat de la question 2.
6. Montrez que s'il n'y a pas de règle applicable, s'il n'y pas d'échec et si la relation $\lessdot_E$ n'a pas de cycle, alors le système E est en forme résolue.
7. Donnez un ordre qui termine et tel que les règles diminuent cet ordre.
8. Définissez l'ensemble des solutions d'un problème multi-équationnel. Montrez que les règles préservent cet ensemble de solutions.