

# ***Réécriture***

## **Introduction**

*version du 27 septembre 2004 – 14 h 21*

## Qu'est-ce que la réécriture

---

La réécriture<sup>a</sup> est la théorie de la simplification qui sert

- en **calcul symbolique**,
- en **sémantique**, la valeur d'une expression est son résultat par évaluation, (il y a des liens avec la lambda calcul),
- en **démonstration automatique**, (il faut «simplifier» à tour de bras !)

---

<sup>a</sup>Certains disent et écrivent la «réécriture».

## Le groupes

---

Considérons les trois équations de l'axiomatique faible des groupes, on note  $*$  le produit,  $e$  l'élément neutre et  $\bar{x}$  l'inverse de  $x$ .

$$x * e = x$$

$$x * \bar{x} = e$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

On veut prouver que  $x = e * x$ , c'est-à-dire qu'«un élément neutre à droite est aussi un élément neutre à gauche!».

Pour s'y retrouver on utilise les des «flèches», pour orienter les équations.

$$x * e \longrightarrow x$$

$$x * \bar{x} \longrightarrow e$$

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z)$$

Pour s'y retrouver on utilise les des «flèches», pour orienter les équations.

$$x * e \longrightarrow x$$

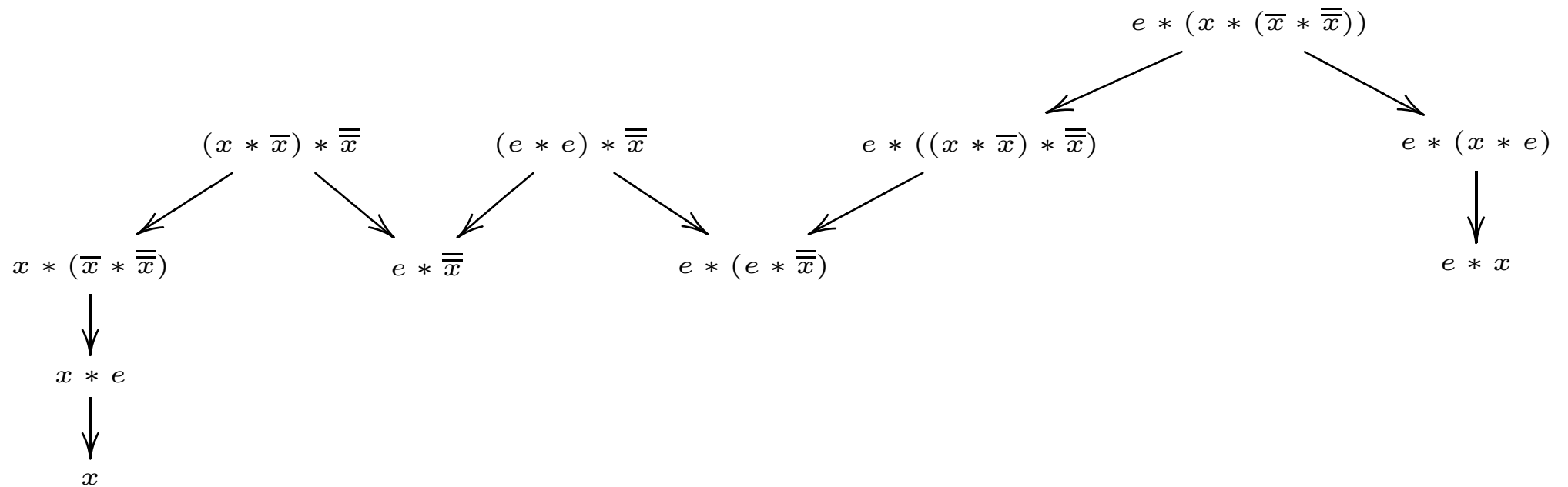
$$x * \bar{x} \longrightarrow e$$

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z)$$

😊 Peut-être même que la flèche symbolise une «simplification» !

# Preuve de $x = e * x$

---



## La grande question de la réécriture

---

Comment peut-on automatiser ce processus de démonstration ?

## Encore des questions

---

- $e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}}))$
- ou  $(e * e) * \bar{\bar{x}}$
- ou  $(x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}}$

se réécrivent de plusieurs manières, ils posent un problème pour un simplifieur.

Est-on sûr que  $e * (x * (\bar{x} * \bar{\bar{x}})) \longrightarrow e * ((x * \bar{x}) * \bar{\bar{x}})$  simplifie quelque chose ?

**Exercice :** prouver  $e = \bar{\bar{x}} * x$ . On pourra regarder **All that** p. 5.



## Encore des questions

---

Des termes comme comme

- Y a-t-il une seule forme simplifiée ?
- Comment orienter les équations ?
- Les processus de simplification se termine-t-il ?
- Comment le démontre-t-on ?
- Sait-on résoudre les équations dans les termes ?
- Peut-on calculer un système pour la simplification dans les groupes ? Quitte à ajouter de nouvelles règles ?

# Un système de «simplification» pour les groupes

---

$$x * e \longrightarrow x$$

$$e * x \longrightarrow x$$

$$x * \bar{x} \longrightarrow e$$

$$\bar{x} * x \longrightarrow e$$

$$\bar{e} \longrightarrow e$$

$$\bar{\bar{x}} \longrightarrow x$$

$$\overline{x * y} \longrightarrow \bar{y} * \bar{x}$$

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z)$$

$$x * (\bar{x} * y) \longrightarrow y$$

$$\bar{x} * (x * b) \longrightarrow b$$

## Associativité et endomorphisme

---

Considérons les deux identités :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad (\text{E})$$

Une **première** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \quad \longrightarrow \quad x * (y * z) \quad (\mathbf{A})$$

$$f(x * y) \quad \longrightarrow \quad f(x) * f(y) \quad (\mathbf{E})$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\mathbf{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\mathbf{E})$$

$$f(x * y) * z \longrightarrow f(x) * (f(y) * z) \quad (\mathbf{EA})$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\text{E})$$

$$f(x * y) * z \longrightarrow f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA})$$

$f(x * y)$  est plus lourd que  $f(x)$ ,

donc  $f(x * y) * z$  penche plus à gauche que  $f(x) * (f(y) * z)$ .

C'est une bonne idée pour orienter l'associativité!

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\mathbf{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\mathbf{E})$$

$$f(x * y) * z \longrightarrow f(x) * (f(y) * z) \quad (\mathbf{EA})$$

$$f^2(x * y) * z \longrightarrow f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad (\mathbf{EEA})$$

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\text{E})$$

$$f(x * y) * z \longrightarrow f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA})$$

$$f^2(x * y) * z \longrightarrow f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad (\text{2EA})$$

$$f^3(x * y) * z \longrightarrow f^3(x) * (f^3(y) * z) \quad (\text{3EA})$$



Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\text{E})$$

$$f(x * y) * z \longrightarrow f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA})$$

$$f^2(x * y) * z \longrightarrow f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad (\text{2EA})$$

$$f^3(x * y) * z \longrightarrow f^3(x) * (f^3(y) * z) \quad (\text{3EA})$$

⋮

$$f^n(x * y) * z \longrightarrow f^n(x) * (f^n(y) * z) \quad (\text{nEA})$$

⋮

Une **deuxième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\text{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\text{E})$$

$$f(x * y) * z \longrightarrow f(x) * (f(y) * z) \quad (\text{EA})$$

$$f^2(x * y) * z \longrightarrow f^2(x) * (f^2(y) * z) \quad (\text{2EA})$$

$$f^3(x * y) * z \longrightarrow f^3(x) * (f^3(y) * z) \quad (\text{3EA})$$

⋮

$$f^n(x * y) * z \longrightarrow f^n(x) * (f^n(y) * z) \quad (\text{nEA})$$

⋮

**HUM!**

Une **troisième** façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\mathbf{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\mathbf{E})$$

$$f(x) * (f(y) * z) \longrightarrow f(x * y) * z \quad (\mathbf{EA})$$

**Il va falloir comprendre tout ç a !**

## Le plan du cours

---

- Les réductions abstraites,
- Termes et systèmes de réécriture,
- La terminaison des systèmes de réécriture,
- La résolution des équations dans les termes ou unification.
- La complétion,
- La résolution et/ou les bases de Gröbner.

## Bibliographie

---

Franz Baader et Tobias Nipkow, *Term Rewriting and All that*,  
Cambridge University Press, (1998)

Christoph Hankin, *Lambda calculi : a Guide for the Computer  
Scientist<sup>a</sup>*,  
Oxford University Press, (1994)

---

<sup>a</sup>pour ceux qui n'ont pas fait de lambda-calcul, à lire avant d'aborder le chapitre sur l'unification,

## Plus de bibliographie

---

Enno Ohlebusch, *Advanced Topics in Term Rewriting*,  
Springer-Verlag, (2002).

Terese, *Term Rewriting Systems*,  
Cambridge University Press, (2003)