# *Récriture*

## Introduction

*version du 27 septembre 2004 – 14 h 21*

# Qu'est-ce que la récriture

La récriture[a] est la théorie de la simplification qui sert

– en calcul symbolique,

– en sémantique, la valeur d'une expression est son résultat par évaluation, (il y a des liens avec la lambda calcul),

– en démonstration automatique, (il faut «simplifier» à tour de bras !)

[a] Certains disent et écrivent la «réécriture».

## Le groupes

Considérons les trois équations de l'axiomatique faible des groupes, on note $*$ le produit, $e$ l'élément neutre et $\overline{x}$ l'inverse de $x$.

$$\begin{aligned} x * e &= x \\ x * \overline{x} &= e \\ (x * y) * z &= x * (y * z) \end{aligned}$$

On veut prouver que $x = e * x$, c'est-à-dire qu'«un élément neutre à droite est aussi un élément neutre à gauche !».

Pour s'y retrouver on utilise les des «flèches», pour orienter les équations.

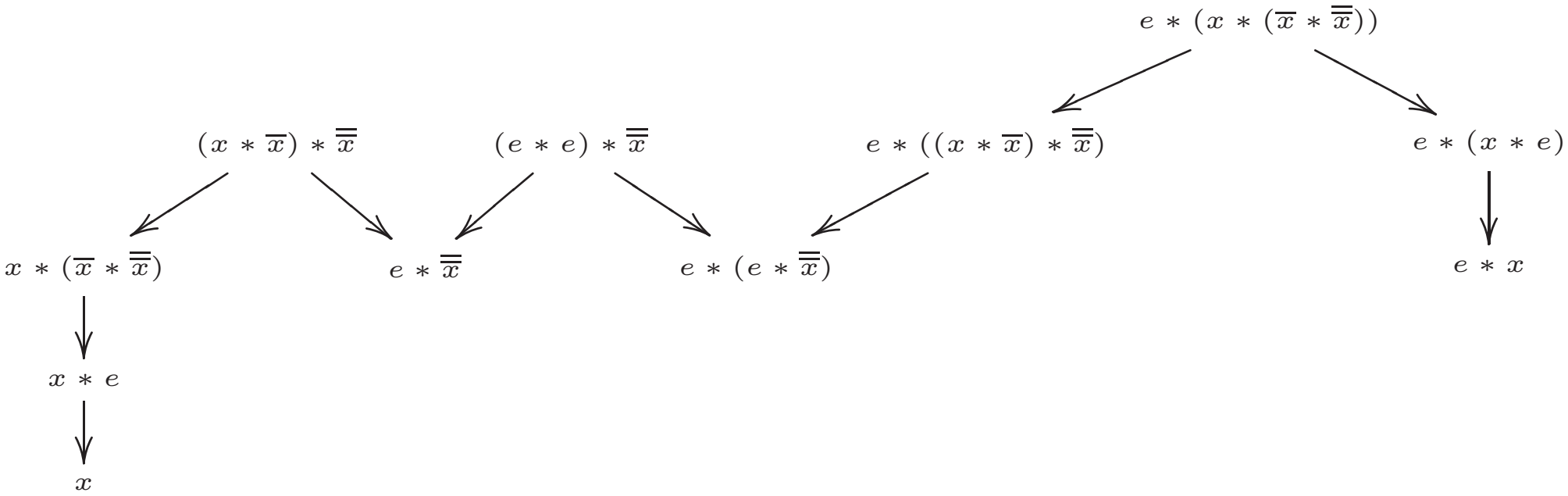
$$
\begin{aligned}
x * e &\longrightarrow x \\
x * \overline{x} &\longrightarrow e \\
(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z)
\end{aligned}
$$

Pour s'y retrouver on utilise les des «flèches», pour orienter les équations.

$$
\begin{aligned}
x * e &\longrightarrow x \\
x * \overline{x} &\longrightarrow e \\
(x * y) * z &\longrightarrow x * (y * z)
\end{aligned}
$$

☺ Peut-être même que la flèche symbolise une «simplification» !

# Preuve de $x = e * x$



# La grande question de la récriture

Comment peut-on automatiser ce processus de démonstration ?

## Encore des questions

– $e * (x * (\overline{x} * \overline{\overline{x}}))$

– ou $(e * e) * \overline{\overline{x}}$

– ou $(x * \overline{x}) * \overline{\overline{x}}$

se récrivent de plusieurs manières, ils posent un problème pour un simplifieur.

Est-on sûr que $e * (x * (\overline{x} * \overline{\overline{x}})) \longrightarrow e * ((x * \overline{x}) * \overline{\overline{x}})$ simplifie quelque chose ?

Exercice : prouver $e = \overline{x} * x$. On pourra regarder All that p. 5.

# Encore des questions

Des termes comme comme

– Y a-t-il une seule forme simplifiée ?
– Comment orienter les équations ?
– Les processus de simplification se termine-t-il ?
– Comment le démontre-t-on ?
– Sait-on résoudre les équations dans les termes ?
– Peut-on calculer un système pour la simplification dans les groupes ? Quitte à ajouter de nouvelles règles ?

# Un système de «simplification» pour les groupes

$$
\begin{array}{rcl}
x * e & \longrightarrow & x \\
e * x & \longrightarrow & x \\
x * \overline{x} & \longrightarrow & e \\
\overline{x} * x & \longrightarrow & e \\
\overline{e} & \longrightarrow & e \\
\overline{\overline{x}} & \longrightarrow & x \\
\overline{x * y} & \longrightarrow & \overline{y} * \overline{x} \\
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) \\
x * (\overline{x} * y) & \longrightarrow & y \\
\overline{x} * (x * b) & \longrightarrow & y
\end{array}
$$

# Associativité et endomorphisme

Considérons les deux identités :

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \text{(A)}$$

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad \text{(E)}$$

Une première façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\mathsf{A})$$

$$f(x * y) \longrightarrow f(x) * f(y) \quad (\mathsf{E})$$

Une deuxième façon de simplifier :

$$
\begin{array}{rcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & (\mathsf{A}) \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & (\mathsf{E}) \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & (\mathsf{EA})
\end{array}
$$

Une deuxième façon de simplifier :

$$
\begin{array}{lcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & (\mathsf{A}) \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & (\mathsf{E}) \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & (\mathsf{EA})
\end{array}
$$

$f(x * y)$ est plus lourd que $f(x)$,

donc $f(x * y) * z$ penche plus à gauche que $f(x) * (f(y) * z)$.

C'est une bonne idée pour orienter l'associativité !

Une deuxième façon de simplifier :

$$
\begin{array}{rcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & (\mathsf{A}) \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & (\mathsf{E}) \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & (\mathsf{EA}) \\
f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) & (\mathsf{EEA})
\end{array}
$$

Une deuxième façon de simplifier :

$$
\begin{array}{rcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & (\mathrm{A}) \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & (\mathrm{E}) \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & (\mathrm{EA}) \\
f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) & (\mathrm{2EA}) \\
f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) & (\mathrm{3EA})
\end{array}
$$

Une deuxième façon de simplifier :

$$
\begin{array}{rcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & (\mathsf{A}) \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & (\mathsf{E}) \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & (\mathsf{EA}) \\
f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) & (\mathsf{2EA}) \\
f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) & (\mathsf{3EA}) \\
 & \vdots & & \\
f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) & (\mathsf{nEA}) \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

Une deuxième façon de simplifier :

$$
\begin{array}{rcll}
(x * y) * z & \longrightarrow & x * (y * z) & (\mathsf{A}) \\
f(x) * f(y) & \longrightarrow & f(x * y) & (\mathsf{E}) \\
f(x * y) * z & \longrightarrow & f(x) * (f(y) * z) & (\mathsf{EA}) \\
f^2(x * y) * z & \longrightarrow & f^2(x) * (f^2(y) * z) & (\mathsf{2EA}) \\
f^3(x * y) * z & \longrightarrow & f^3(x) * (f^3(y) * z) & (\mathsf{3EA}) \\
 & \vdots & & \\
f^n(x * y) * z & \longrightarrow & f^n(x) * (f^n(y) * z) & (\mathsf{nEA}) \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

HUM !

Une troisième façon de simplifier :

$$(x * y) * z \longrightarrow x * (y * z) \quad (\mathsf{A})$$

$$f(x) * f(y) \longrightarrow f(x * y) \quad (\mathsf{E})$$

$$f(x) * (f(y) * z) \longrightarrow f(x * y) * z \quad (\mathsf{EA})$$

Il va falloir comprendre tout ça !

# Le plan du cours

- Les réductions abstraites,
- Termes et systèmes de récriture,
- La terminaision des systèmes de récriture,
- La résolution des équations dans les termes ou unification.
- La complétion,
- La résolution et/ou les bases de Gröbner.

# Bibliographie

Franz Baader et Tobias Nipkow, Term Rewriting and All that,

Cambridge University Press, (1998)

Chistoph Hankin, Lambda calculi : a Guide for the Computer Scientist[a],

Oxford University Press, (1994)

[a] pour ceux qui n'ont pas fait de lambda-calcul, à lire avant d'aborder le chapitre sur l'unification,

# Plus de bibliographie

Enno Ohlebusch, Advanced Topics in Term Rewriting,

Springer-Verlag, (2002).

Terese, Term Rewriting Systems,

Cambridge University Press, (2003)