Réécriture

Ordre sur les preuves

version du December 6, 2004 – 18 h 10

Rappel

$$E_\infty = \bigcup_{i \geq 0} E_i \qquad R_\infty = \bigcup_{i \geq 0} R_i$$

$$E_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \bigcap_{j \geq i} E_j \qquad R_\omega = \bigcup_{i \geq 0} \bigcap_{j \geq i} R_j$$

Petite histoire d'une preuve

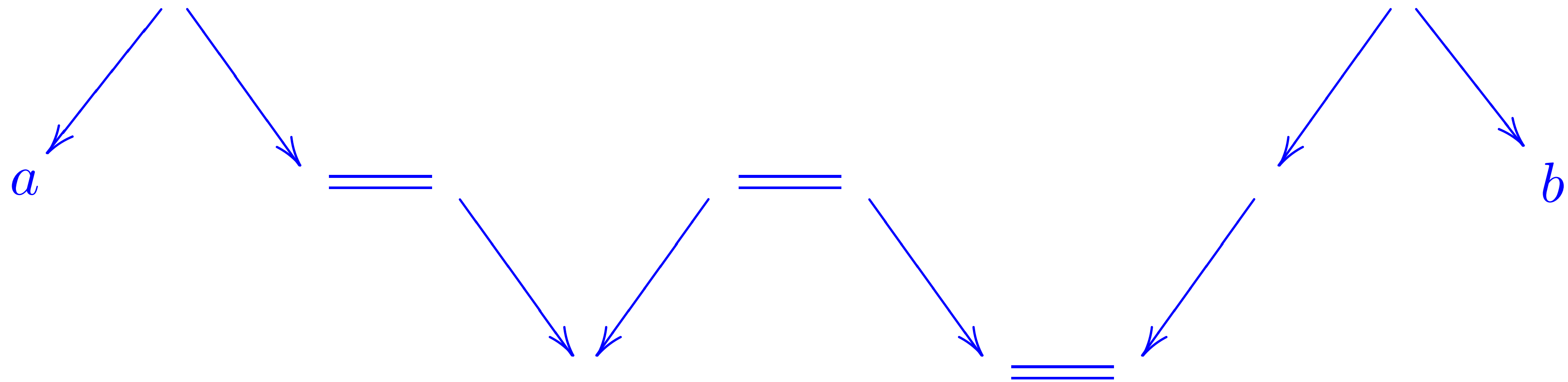
Les preuves de $a = b$

Considérons les preuves équationnelles possibles de l'égalité de deux termes $a = b$.

Au niveau (E_0, R_0) (avec $R_0 = \emptyset$) c'est une preuve complètement par identités.

$$a = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = b$$

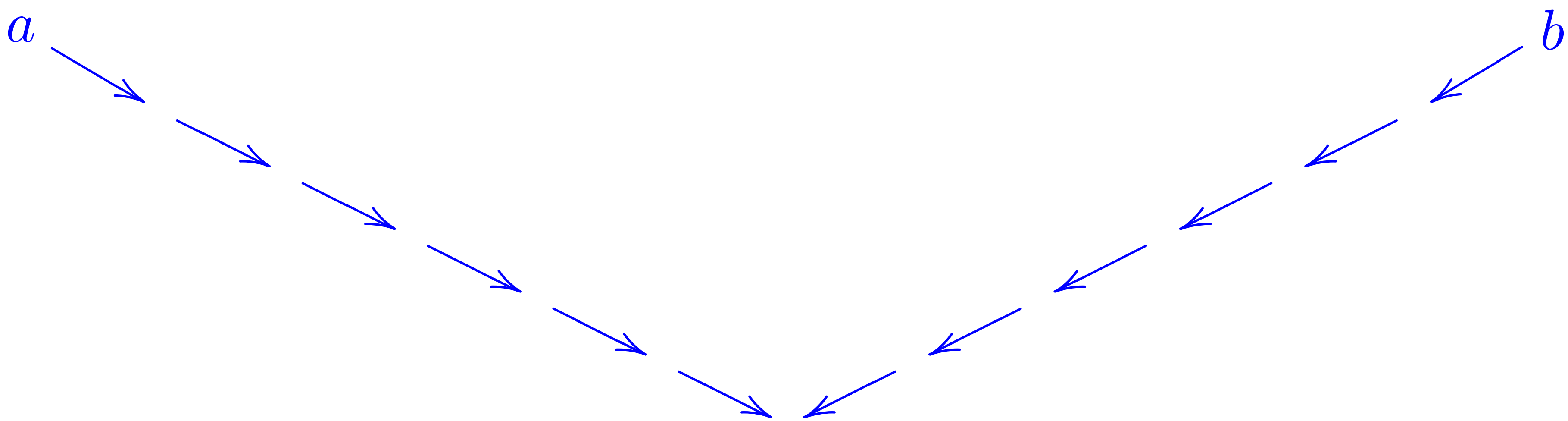
alors qu'au niveau (E_i, R_i) pour un i quelconque, c'est une preuve hétérogène.



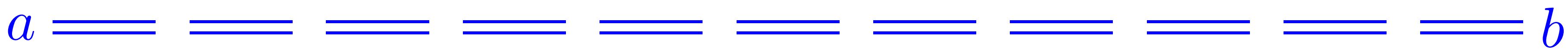
Car certaines identités ne sont plus présentes et il faut les remplacer par des réécritures.

Les preuves de $a = b$ (suite)

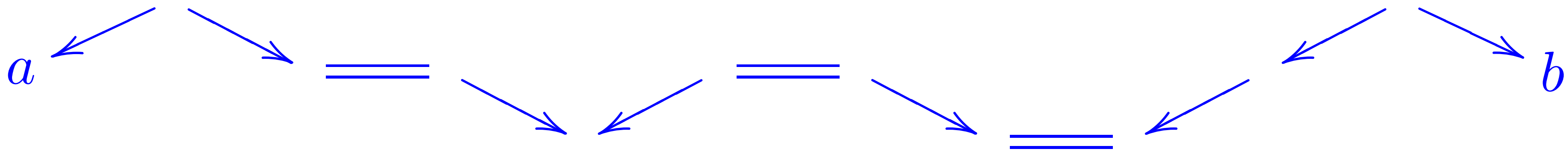
En fait ce qu'on souhaite c'est une preuve complétement par réécriture (une preuve en vallée).



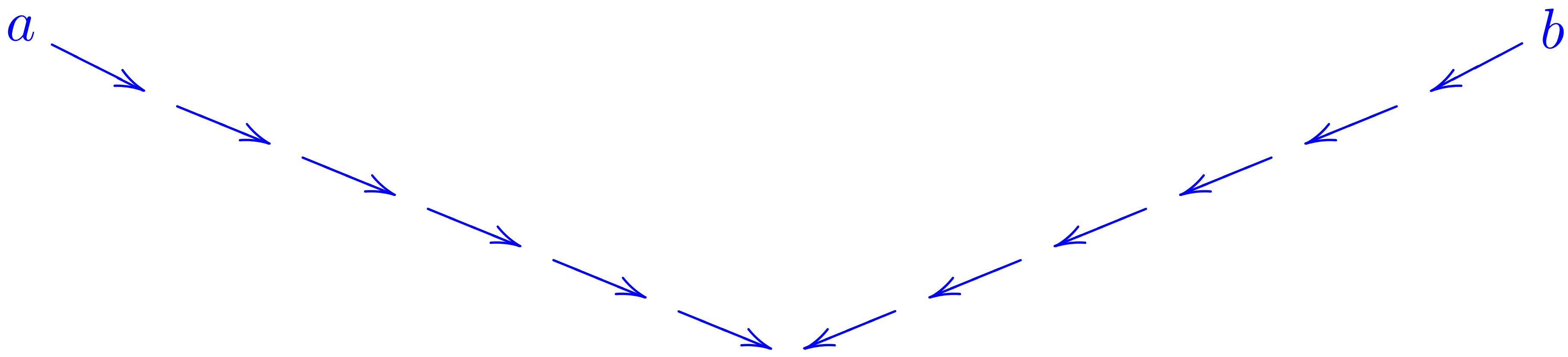
Début



Milieu



Fin



Il faut montrer que pour tout couple tel que $a =_{E_0} b$, il y a une preuve de réécriture dans R_ω, c'est-à-dire qu'il existe un c tels que

$$a \xrightarrow[R_\omega]{*} c \xleftarrow[R_\omega]{*} b$$

Il faut donc voir comment les preuves se transforment.

Pour cela, on transforme chaque étape de preuve en une étape de preuve plus simple et on montre en se servant d'un ordre noethérien adéquat que le processus de transformation termine.

Un ordre sur les preuves

Le coût d'une preuve

Une preuve où les termes intermédiaires sont $a_1, \ldots . a_k, a_{k+1}, \ldots a_n$ est associée au multiensemble $\{\!\{ a_1 \; \pounds_1 \; a_2, \ldots, a_k \; \pounds_k \; a_{k+1}, \ldots \}\!\}$.

Chaque $\pounds_k$ représente soit

$$= \qquad \longrightarrow \qquad \longleftarrow.$$

On va attribuer à chaque preuve un coût.

Auparavant on attribue un coût à chaque étape élémentaire.

Le coût d'une preuve est le multiensemble des coûts de chacune de ses étapes élémentaires.

Le coût d'une étape élémentaire

Le coût d'une étape élémentaire $a \pounds b$ est un triplet (M, l, r).

Le coût d’une paire (suite)

On attribue les coûts de la façon suivante :

- si $a_k \pounds_k a_{k+1}$ est de la forme $a_k = a_{k+1}$, le coût est $(\{\!\{a_k, a_{k+1}\}\!\}, \_, \_)$[a],
- si $a_k \pounds_k a_{k+1}$ est de la forme $a_k \longrightarrow a_{k+1}$, le coût est $(\{\!\{a_k\}\!\}, l, r)$, où l est le membre gauche de la règle de réécriture employée et r est le membre droit de la règle de réécriture employée.
- si $a_k \pounds_k a_{k+1}$ est de la forme $a_k \longleftarrow a_{k+1}$, le coût est $(\{\!\{a_{k+1}\}\!\}, l, r)$, où l est le membre gauche de la règle de la réécriture employée et r est le membre droit de la règle de réécriture employée.

[a] $\_$ signifie qu’on n’attache pas d’importance à ce champ.

La comparaison des coûts de paires

Pour la première composante (M), c'est l'extension multiensemble de l'ordre sur les termes.

Pour la deuxième composante (l), c'est l'ordre d'enchâssement.

Pour la troisième composante (r), c'est l'ordre sur les termes.

Ainsi

- l'ordre sur les coûts termine.
- l'ordre sur les preuves termine.

L'enchâssement

La relation d'enchâssement $\trianglerighteq$ (en anglais encompassment) est définie par

$$s \trianglerighteq t$$

si et seulement si

$$\exists p \in Pos(s) \cdot \exists \sigma \in Sub(T(\Sigma, V)) \cdot \quad s_{|p} = \sigma(t)$$

$\trianglerighteq \cap \trianglelefteq$ est $=$.

$\dot{\rhd}$ est la relation $\dot{\unrhd} \cap \not\sim$ (où $\sim$ est le renommage des variables), elle termine.

L’ordre sur les preuves

L’ordre sur les preuves s’écrit :

$$\mathcal{P} \succ_C \mathcal{P}'$$

Deux preuves sont équivalentes si elles prouvent la même identité.

Décroissance des preuves

Chaque transition fait décroître les preuves.

Si la transition est Delete. Si cette transition affecte une étape $a_k \; \pounds_k \; a_{k+1}$ de la preuve alors cette étape disparaît et le coût de la preuve diminue.

$$\cdots \; a_k \; = \!= \!= \; a_{k+1} \; \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$\cdots\cdots \qquad a_k \; \cdots\cdots\cdots$$

Décroissance des preuves

Si la transition est Compose.

$$a_k \xrightarrow[R_\infty]{} a_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} a_k & & a_{k+1} \\ & {}_{R_\infty}\searrow \quad \swarrow_{R_\infty} & \\ & c & \end{array}$$

$cout(a_k \to a_{k+1}) = (\{\!\{a_k\}\!\}, s, t) > cout(a_k \to c) = (\{\!\{a_k\}\!\}, s, u)$ parce que $\{\!\{a_k\}\!\} = \{\!\{a_k\}\!\}$, $s = s$ et $t > u$,

et

$cout(a_k \to a_{k+1}) > cout(c \leftarrow a_{k+1})$ parce que $\{\!\{a_k\}\!\} \gg \{\!\{a_{k+1}\}\!\}$.

Décroissance des preuves

Si la transition est Simplify.

$$a_k \underset{R_\infty}{=\!=\!=} a_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} a_k \arrow[dr, equal, "R_\infty"'] & & a_{k+1} \arrow[dl, "R_\infty"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

$cout(a_k = a_{k+1}) > cout(a_k = c)$ parce que $\{\!\{a_k, a_{k+1}\}\!\} \gg \{\!\{a_k, c\}\!\}$

et

$cout(a_k = a_{k+1}) > cout(c \leftarrow a_{k+1})$ parce que $\{\!\{a_k, a_{k+1}\}\!\} \gg \{\!\{a_{k+1}\}\!\}$.

Décroissance des preuves

Si la transition est Collapse.

$$a_k \xrightarrow[R_\infty]{} a_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
a_k \arrow[dr, "R_\infty"'] & & a_{k+1} \arrow[dl, equal, "E_\infty"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

$cout(a_k \to a_{k+1}) = (\{\!\{a_k\}\!\}, s, t) > cout(a_k \to c) = (\{\!\{a_k\}\!\}, l, r)$ parce que $\{\!\{a_k\}\!\} = \{\!\{a_k\}\!\}$, et ou bien ou bien $s \rhd l$ ou bien $s = l$ et $t > r$.

et

$cout(a_k \to a_{k+1}) > cout(c = a_{k+1})$ parce que $\{\!\{a_k\}\!\} \gg \{\!\{c, a_{k+1}\}\!\}$.

Décroissance des preuves

Si la transition est Orient.

$$a_k \underset{R_\infty}{=\!=} a_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_k \underset{R_\infty}{\longrightarrow} a_{k+1}$$

$cout(a_k = a_{k+1}) > cout(a_k \to a_{k+1})$ parce que $\{\!\{a_k, a_{k+1}\}\!\} \gg \{\!\{a_k\}\!\}$.

Décroissance des preuves

Comment décroître un pic ? $a_{k-1} \xleftarrow[R_\infty]{} a_k \xrightarrow[R_\infty]{} a_{k+1}$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que le pic est un pic dans R_ω soit $a_{k-1} \xleftarrow[R_\omega]{} a_k \xrightarrow[R_\omega]{} a_{k+1}$.

Sinon ce pic disparaît par l'une des transitions Compose ou Collapse déjà vues.

Décroissance des preuves

Comment décroître un pic ?

Deux cas :

1. il s'agit d'une paire critique de R_ω,
2. il s'agit de deux règles qui s'appliquent sans superposition.

Comment décroître un pic ?

Pour le cas 1, grâce à l'équité, on sait qu'une transition Deduce va s'appliquer tôt ou tard et

$$\begin{array}{ccccc} & & a_k & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a_{k-1} & R_\omega & & R_\omega & a_{k+1} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{k-1} \underset{E_\infty}{=\!=\!=\!=\!=} a_{k+1}$$

et on remarque que $\{\!\{a_k\}\!\} \gg \{\!\{a_{k-1}, a_{k+1}\}\!\}$

Comment décroître un pic ?

Pour le cas 2, sans le besoin d'aucune transition cette preuve a,

à l'étape i, une preuve d'un coût moindre.

$$
\begin{tikzcd}
 & a_k \arrow[dl, "R_\omega"'] \arrow[dr, "R_\omega"] & \\
a_{k-1} & & a_{k+1}
\end{tikzcd}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{tikzcd}
a_{k-1} \arrow[dr, dotted, "*", "R_\infty"'] & & a_{k+1} \arrow[dl, dotted, "*"', "R_\infty"] \\
 & c &
\end{tikzcd}
$$

En effet, $\{\!\{a_k\}\!\}$ domine toutes les étapes de réécriture de

$a_{k-1} \xrightarrow{*} c \xleftarrow{*} a_{k+1}$.

Théorème :

Le contrôle de la complétion est supposé équitable.

Si il existe une preuve $\mathcal{P}$ dans $E_\infty \cup R_\infty$ qui n'est pas une preuve de réécriture

alors il existe dans $E_\infty \cup R_\infty$ une preuve $\mathcal{P}'$ équivalente à $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P} \succ_C \mathcal{P}'$.

Théorème :

Le contrôle de la complétion est supposé équitable.

Si il existe une preuve $\mathcal{P}$ dans $E_\infty \cup R_\infty$ qui n'est pas une preuve de réécriture alors il existe dans $E_\infty \cup R_\infty$ une preuve $\mathcal{P}'$ équivalente à $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P} \succ_C \mathcal{P}'$.

Par les résultats précédents, si la preuve $\mathcal{P}$ n'est pas une preuve par réécriture, elle peut-être réduite.

Corollaire:

Le contrôle de la complétion est supposé équitable.

- Si il existe une preuve $\mathcal{P}$ dans $E_\infty \cup R_\infty$

  alors il existe une preuve de réécriture equivalente dans R_ω.
- R_ω est canonique, c-à-d est confluent, terminant et interréduit.
- Si R_ω est fini alors le problème du mot dans E_0 est décidable.