Réécriture

Reductions abstraites

version du 4 octobre 2004 – 17 h 05

Quelques rappels

Si R et T sont deux relations binaires sur A notées de façon infixée (c-à-d, $x \; R \; y$). On définit

- $x \; R \, T \; y$ ssi il existe z tel que $x \; R \; z$ et $z \; T \; y$.
- R^n par $R^0 = \{(x, x) \mid x \in A\}$ et $R^{n+1} = R \, R^n$

  (donc $R^1 = R$).
- $R \subseteq T$ ssi $x \; R \; y$ implique $x \; T \; y$.
- $x \; (R \bigcup T) \; y$ ssi $x \; R \; y$ ou $x \; T \; y$.

Quelques rappels

Une relation est transitive si $x\ R\ y$ et $y\ R\ z$ impliquent $x\ R\ z$.

La fermeture transitive de R est la plus petite relation transitive qui contient R. Elle est notée R^+.

Encore des notations

Souvent la relation R est notée $\xrightarrow[R]{}$.

- R^{-1} est la relation converse $\{(y,x) \in A \times A \mid (x,y) \in R\}$,

  aussi notée $\xleftarrow[R]{}$.

- $\xrightarrow[R]{+}$ est la clôture transitive de $\xrightarrow[R]{}$,
- $\xrightarrow[R]{*}$ est la clôture réflexive et transitive de $\xrightarrow[R]{}$,

Terminologie

Si $a \xrightarrow[R]{} b$, on dit que a se contracte en b par R.

Si $a \xrightarrow[R]{*} b$, on dit que a se réduit en b par R.

Encore des notations

- $\underset{R}{\longleftrightarrow}$ est la clôture symétrique,

  c'est la relation $\underset{R}{\longrightarrow} \cup \underset{R}{\longleftarrow}$.

- $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\underset{R}{\longrightarrow}$.

  C'est aussi la clôture réflexive et transitive de $\underset{R}{\longleftrightarrow}$.

- $\overset{+}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est la clôture symétrique et transitive de $\underset{R}{\longrightarrow}$.

  C'est aussi la clôture transitive de $\underset{R}{\longleftrightarrow}$.

Encore des notations

- $\xrightarrow[R]{=}$ est la clôture réflexive,

  c'est la relation $\xrightarrow[R]{} \cup \xrightarrow[R]{0}$

  sachant que $\xrightarrow[R]{0}$ est l'égalité

Encore des notations

En λ-calcul,

- $\xrightarrow{*}$ est noté $\twoheadrightarrow$,
- $\xleftrightarrow{*}$ est noté $\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow$.

C'est culturel !

Confluence

Une relation R sur A est confluente si

$$(\forall M, N_1, N_2 \in A) M \xrightarrow[R]{*} N_1 \,\&\, M \xrightarrow[R]{*} N_2$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\exists P \in A) N_1 \xrightarrow[R]{*} P \,\&\, N_2 \xrightarrow[R]{*} P$$

autrement dit

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "*"', "R"] \arrow[dr, "*", "R"'] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "*", "R"'] & & N_2 \arrow[dl, "*"', "R"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Semi-confluence

Une relation R sur A est semi-confluente si

$$(\forall M, N_1, N_2 \in A)\ \ M \xrightarrow[R]{} N_1 \,\&\, M \xrightarrow[R]{*} N_2$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\exists P \in A)\ \ N_1 \xrightarrow[R]{*} P \,\&\, N_2 \xrightarrow[R]{*} P$$

autrement dit

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R", "*"'] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "R"', "*"] & & N_2 \arrow[dl, "R", "*"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Confluence locale

Une relation R sur A est localement confluente si

$$(\forall M, N_1, N_2 \in A)\ \ M \underset{R}{\longrightarrow} N_1 \,\&\, M \underset{R}{\longrightarrow} N_2$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\exists P \in A)\ \ N_1 \overset{*}{\underset{R}{\longrightarrow}} P \,\&\, N_2 \overset{*}{\underset{R}{\longrightarrow}} P$$

autrement dit

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \qquad \Longrightarrow \exists P \qquad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "*", "R"'] & & N_2 \arrow[dl, "*"', "R"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Paire joignable

Une paire de terme (N_1, N_2) est joignable, notée $N_1 \downarrow N_2$ si

$$(\exists P \in A)\ \ N_1 \ \xrightarrow[R]{*}\ P \,\&\, N_2 \ \xrightarrow[R]{*}\ P$$

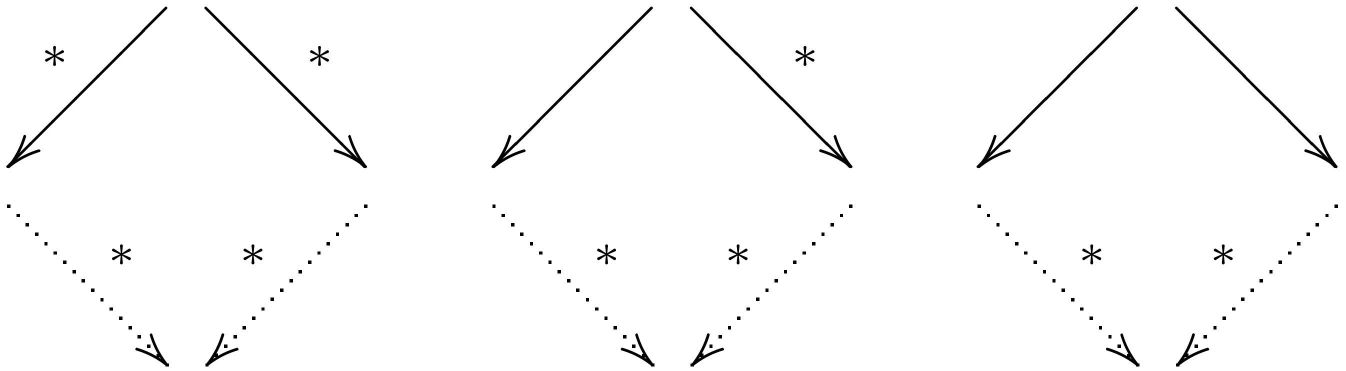
d'où

- confluence : $M \ \xrightarrow[R]{*}\ N_1 \,\&\, M \ \xrightarrow[R]{*}\ N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2$,
- semi-confluence :

  $M \ \xrightarrow[R]{}\ N_1 \,\&\, M \ \xrightarrow[R]{*}\ N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2$.
- confluence locale :

  $M \ \xrightarrow[R]{}\ N_1 \,\&\, M \ \xrightarrow[R]{}\ N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2$,

Diagrammes



confluence　　semi-confluence　　confluence locale

$\overset{*}{\dashrightarrow}$ est un flèche existentielle.

Propriété de Church Rosser

$$N_1 \xleftrightarrow[R]{*} N_2 \quad \Longrightarrow \quad N_1 \downarrow N_2$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"] & & {} \arrow[dl, dotted, "*"'] \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes

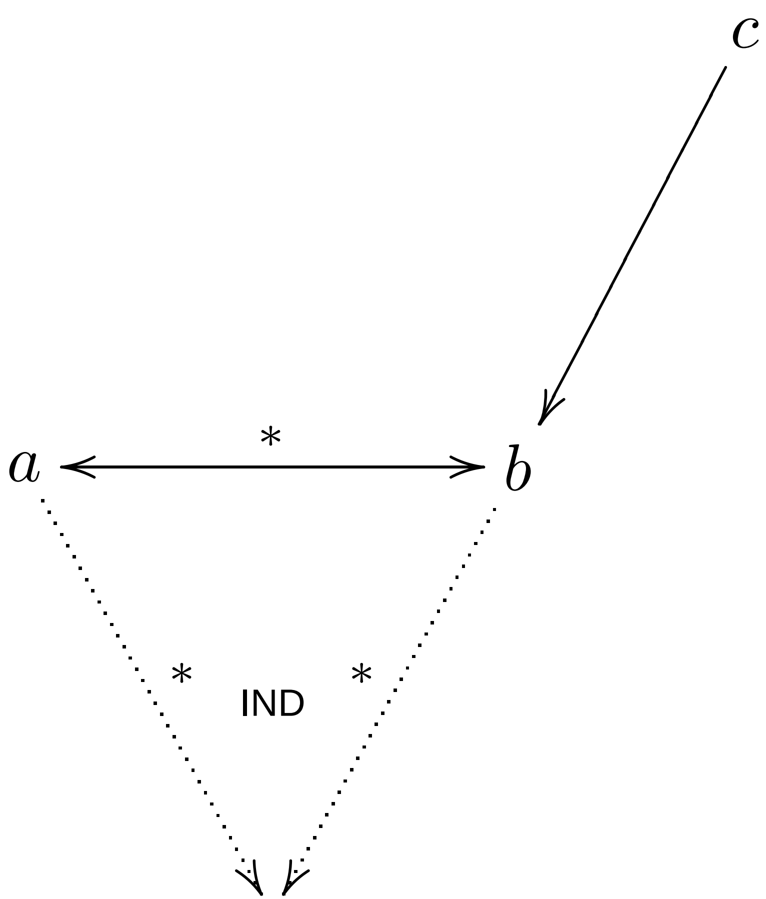
- R est confluente,
- R est semi-confluente,
- R a la propriété de Church-Rosser

Church-Rosser $\Rightarrow$ confluence $\Rightarrow$ semi-confluence est facile !

$\boxed{\text{Semi-confluence} \quad \Rightarrow \quad \text{Church-Rosser}}$

Par induction sur la longueur de $\overset{*}{\longleftrightarrow}$.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] & {} \arrow[d, phantom, "\text{IND}"] & b \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, dotted, "*"] & c \\
& {} & &
\end{tikzcd}
$$


c
a
*
b
*
IND
*

$$
\begin{tikzcd}
& & & c \arrow[dl] \arrow[ddll, dotted, bend left, "*"] \\
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\text{IND}"] & & b \arrow[dl, dotted, "*"] & \\
& {} & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"'] & {} \arrow[d, phantom, "\mathsf{IND}"] & b \arrow[dl, dotted, "*"] \arrow[dr] & \\
& {} & & c
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"] & {} \arrow[d, phantom, "\mathsf{IND}"] & b \arrow[dl, dotted, "*"'] \arrow[dr] & \\
& {} \arrow[dr, dotted, "*"] \arrow[rr, phantom, "\mathsf{SC}"] & & c \arrow[dl, dotted, "*"'] \\
& & {} &
\end{tikzcd}
$$

Encore des concepts !

A partir de maintenant on laisse tomber les R s'il n'y a pas d'ambiguïté.

– x est réductible ssi il existe un y tel que $x \longrightarrow y$,
– x est irréductible ssi x n'est pas réductible,
– y est une forme normale de x ssi $x \stackrel{*}{\longrightarrow} y$ et y est irréductible.
  Si la forme normale est déterminée de façon unique on la note $x \downarrow$.

Terminaison

Une relation R termine ou est noethérienne

ssi

il n'existe pas de suite infinie

$$x_0 \underset{R}{\longrightarrow} x_1 \underset{R}{\longrightarrow} \ldots x_n \underset{R}{\longrightarrow} x_{n+1} \cdots$$

Convergence

Une relation est convergente si elle termine et est confluente

Normalisante

Une relation est normalisante si toute élément a une fonorme normale.

Quelques faits

- Si $\longrightarrow$ est confluente, chaque élément a au plus une forme normale.
- Si $\longrightarrow$ est confluente et normalisante, chaque élément a une forme normale unique.

Preuve de convertibilité par normalisation

Si $\longrightarrow$ est confluente et normalisante, alors

$$x \stackrel{*}{\longleftrightarrow} y \quad \Leftrightarrow \quad x\downarrow = y\downarrow$$

Preuve de convertibilité par normalisation

Si $\longrightarrow$ est confluente et normalisante, alors
$x \overset{*}{\longleftrightarrow} y \quad \Leftrightarrow \quad x\downarrow = y\downarrow$

Fort bien, mais y a-t-il un moyen simple

1. de calculer ces formes normales ?
2. de savoir si une relation est normalisante ?

Induction noethérienne

$$(\mathcal{IN}) \quad \frac{(\forall x \in A)\ ((\forall y \in A)\ x \longrightarrow y \Rightarrow P(y))\ \Rightarrow P(x)}{(\forall a \in A) P(a)}$$

$\boxed{(\mathcal{IN}) \text{ est satisfaite sur } A \text{ si et seulement si } \longrightarrow \text{ termine.}}$

Encore des concepts !

Une relation est à branchement fini

ssi pour tout x il n'y a qu'un nombre fini de y tels que $x \longrightarrow y$.

Une relation est globalement finie

ssi pour tout x il n'y a qu'un nombre fini de y tels que $x \xrightarrow{+} y$.

Une relation est acyclique

ssi il n'y a pas d'élément a tel que $a \xrightarrow{+} a$.

$$\boxed{\text{Une relation à branchement fini est globalement finie si elle termine}}$$

$\boxed{\text{Une relation à branchement fini est globalement finie si elle termine}}$

Nous devons prouver

$$\text{branchement fini} + \text{termine}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{globalement fini}$$

$\boxed{\text{Une relation à branchement fini est globalement finie si elle termine}}$

Par induction noethérienne.

Soit $Contract(a) = \{x \in A \mid a \longrightarrow x\}$.

Soit $Reduits(a) = \{x \in A \mid a \xrightarrow{+} x\}$.

Nous devons prouver «$(\forall a \in A)\ Reduits(a)$ est fini».

Pour le faire par induction noethérienne, nous devons prouver que

«Pour tout b tel $a \longrightarrow b$ on a $Reduits(b)$ est fini»

implique

«$Reduits(a)$ est fini».

Une relation à branchement fini est globalement finie si elle termine

Or

$$Reduits(a) = Contract(a) \cup \bigcup_{b \in Contract(a)} Reduits(b)$$

Donc $Reduits(a)$ qui est une réunion finie d'ensembles finis est finie.

En application de $(\mathcal{IN})$, «$(\forall a \in A)\ Reduits(a)$ est fini».

$\boxed{\text{Une relation acyclique termine si elle est globalement finie.}}$

$\boxed{\text{Une relation acyclique termine si elle est globalement finie.}}$

Nous devons prouver

$$\text{acyclique} + \text{globalement fini}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{termine}$$

$\boxed{\text{Une relation acyclique termine si elle est globalement finie.}}$

Soit $\longrightarrow$ une relation acyclique.

Si elle ne termine pas, alors il existe une suite

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots x_n \longrightarrow x_{n+1} \cdots$$

Puisque la relation est acyclique, les éléments sont tous différents.

Donc $Reduits(x_0)$ est infini et la relation n'est pas globalement finie.

Lemme de Koenig

Soient $(A, \longrightarrow)$ une relation acyclique et à branchement fini et $a \in A$.

$Reduits(a)$ est infini

si et seulement si

il existe un chemin infini

$$a \longrightarrow a_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow a_n \longrightarrow a_{n+1} \longrightarrow \dots$$

qui part de a.

Lemme de Koenig (deuxième formulation)

Soient $\longrightarrow$ une relation acyclique et à branchement fini.

$\longrightarrow$ est globalement finie

si et seulement si

$\longrightarrow$ termine.

Lemme de Koenig (démonstration)

On s'appuie sur les deux lemmes précédents.

Dans un sens, on a montré que

$$\text{acyclique} + \text{globalement fini} \Longrightarrow \text{termine}$$

Lemme de Koenig (démonstration)

Dans l'autre sens, on a montré que

à branchement fini + termine

$$\Longrightarrow$$

globalement fini

Prouver la terminaison

Les suites de Goodstein

Considérons la décomposition en base k d'un nombre.

Ainsi la décomposition en base 3 de 111 est $3^{3+1} + 3^3 + 3$.

Soit un nombre n. On définit une suite $n_2, n_3, \ldots$ dont le premier terme est $n_2 = n$.

On passe de n_k à n_{k+1} de la façon suivante : on pose $m_k = n_k - 1$. Dans la décomposition en base k de m_k on remplace toutes les occurrences de k par $k + 1$, on obtient n_{k+1}.

Ainsi si $n_2 = 15$ alors $m_2 = 14 = 2^{2+1} + 2^2 + 2$

$n_3 = 3^{3+1} + 3^3 + 3 = 111$,

$n_4 = 4^{4+1} + 4^4 + 2 = 1282$,

$n_5 = 5^{5+1} + 5^5 + 1 = 18751$,

$n_6 = 6^{6+1} + 6^6 = 326592$,

$n_7 = 7^{7+1} + ...$,

$\vdots$

$n_{40000} = 40000^{40000+1} + ...$

$\vdots$

Le processus termine, il existe un entier p tel que $n_p = 0$

Les fonctions croissantes

Soit $(A, \;\longrightarrow\;)$

On connaît $(B, >)$ est noethérien et $\varphi : A \rightarrow B$ telle que $x \;\longrightarrow\; y$ implique $\varphi(x) > \varphi(y)$.

Le plus souvent on prend $(\mathbb{N}, >)$.

Une relation à branchement fini termine

si et seulement si

elle est plongeable dans $\mathbb{N}$.

Composition lexicographique de deux ordres

Soient deux ordres $(A_1, >_1)$ et $(A_2, >_2)$.

On définit l'ordre $>_1 \times_{lex} >_2$ sur $A_1 \times A_2$, par

$(a_1, a_2) \quad >_1 \times_{lex} >_2 \quad (b_1, b_2)$ ssi

– $a_1 >_1 b_1$

– ou $a_1 =_1 b_1$ et $a_2 >_2 b_2$.

$$\boxed{\text{Si } >_1 \text{ et } >_2 \text{ terminent alors } >_1 \times_{lex} >_2 \text{ termine.}}$$

Composition lexicographique de n ordres

Soient $(A_n, >_n)$, ..., $(A_1, >_1)$, $(A_0, >_0)$ des ordres.

Soit $\mathbf{A}_{n+1} = A_{n+1} \times \mathbf{A}_n$
et $\mathbf{A}_0 = A_0$.

On définit l'ordre $>_n^{lex}$ sur $\mathbf{A}_n$ ainsi :

- $>_0^{lex}$ est $>_0$,
- Si $(x, \mathbf{x}), (y, \mathbf{y}) \in A_{n+1} \times \mathbf{A}_n$, alors $(x, \mathbf{x}) >_{n+1}^{lex} (y, \mathbf{y})$ ssi
  - $x >_{n+1} y$,
  - ou $x = y$ et $\mathbf{x} >_n^{lex} \mathbf{y}$.

Si les ordres $(A_n, >_n)$, ..., $(A_1, >_1)$, $(A_0, >_0)$ terminent alors $(\mathbf{A}_n, >_n^{lex})$ termine

Si les ordres $(A_n, >_n)$, ..., $(A_1, >_1)$, $(A_0, >_0)$ terminent alors $(\mathbf{A}_n, >_n^{lex})$ termine

Ordres stricts et lexicographie

Un ordre strict est une relation transitive et irréflexive.

Si les ordres $(A_n, >_n)$, ..., $(A_1, >_1)$, $(A_0, >_0)$ sont stricts alors $(\mathbf{A}_n, >_n^{lex})$ est strict.

Attention à la lexicographie !

La composition lexicographique se fait sur des relations et peut donner des résultats surprenants.

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$\geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \geq_{\mathbb{N}} \;\equiv\; \geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \mathbf{U}$
où **U** est la relation universelle $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N}\}$.

Attention à la lexicographie !

La composition lexicographique se fait sur des relations et peut donner des résultats surprenants.

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$\geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \geq_{\mathbb{N}} \;\equiv\; \geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \mathbf{U}$
où **U** est la relation universelle $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \;\&\; y \in \mathbb{N}\}$.

Pour tous m, n, p, on a donc $(m, n) \geq_{\mathbb{N}} \times_{lex} \geq_{\mathbb{N}} (m, p)$.

Produit lexicographique d'ordres

Pour définir le produit lexicographique d'ordres on définit

1. le produit lexicographique de leur partie stricte[a],
2. la clôture réflexive de ce produit,

ou encore directement

$$(x, y) \geq_{A\times B} (x', y') \qquad \text{ssi} \qquad (x >_A x') \vee (x = x' \ \& \ y \geq_B y').$$

[a]la partie stricte de $\geq$ est l'ordre défi ni par $x > y$ ssi $x \geq y \& x \neq y$

Multiensemble

Un multiensemble M sur A est une fonction $M : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

Intuitivement : on peut s'imaginer qu'il s'agit d'«ensembles» où la répétition d'éléments est autorisée, $M(x)$ est le nombre de répétitions de x dans M.

Un multiensemble est fini si $\{x \in A \mid M(x) \neq 0\}$ est fini.

$\mathcal{M}(A)$ est l'ensemble des multiensembles finis sur A.

Multiensemble

La notation standard est $\{a, a, b\}$

ou $\{\!\{a, a, b\}\!\}$ si l'on veut bien préciser qu'il s'agit d'un multiensemble.

pour $\{a \mapsto 2, b \mapsto 1, c \mapsto 0\}$.

Opérations sur les multiensembles

$x \in M$ ssi $M(X) > 0$

$M \supseteq N$ ssi $(\forall x \in A) M(x) \geq N(x)$

$(M \cup N)(x)$ = $M(x) + N(x)$

$(M - N)(x)$ = $M(x) \dot{-} N(x)$ où $m \dot{-} n = max(m - n, 0)$.

Ordre multiensemble

Soit $>$ un ordre strict sur A.

L'extension multiensemble $>_{mult}$ sur $\mathcal{M}(A)$ est définie par

$M >_{mult} N$ ssi

il existe X et Y tels que

- $\emptyset \neq X \subseteq M$ et
- $N = (M - X) \cup Y$ et
- $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) x > y$

Propriété de l’ordre multiensemble I

Si $>$ est strict, alors $>_{mult}$ est strict.

Propriété de l'ordre multiensemble I

Si $>$ est strict, alors $>_{mult}$ est strict.

1. irréflexivité
2. transitivité

Propriété de l'ordre multiensemble II

$\boxed{\text{Si } >_{mult} \text{ termine, alors } > \text{ termine.}}$

Propriété de l'ordre multiensemble II

Si $>_{mult}$ sur $\mathcal{M}(A)$ termine, alors $>$ sur A termine.

Puisque A est plongé dans $\mathcal{M}(A)$ par $a \mapsto \{\!\{a\}\!\}$, clairement la terminaison sur $\mathcal{M}(A)$ implique celle sur A.

Propriété de l'ordre multiensemble II

$\boxed{\text{Si } > \text{ termine, alors } >_{mult} \text{ termine.}}$

Réciproquement, supposons que $>_{mult}$ ne termine pas sur $\mathcal{M}(A)$.

Alors il existe une suite infinie décroissante de multiensembles.

$$M_0 >_{mult} M_1 >_{mult} ... M_n >_{mult} M_{n+1}$$

On pose $M_{n+1} = (M_n - X_n) \cup Y_n$

On veut construire une arborescence étiquetée qui contredit le lemme de Koenig, à savoir :

– infini,
– à branchement fini,
– tous ses chemins sont finis.

Plus précisément, on construit une relation

– qui n'est pas globalement finie,

– qui est à branchement fini,

– et qui ne termine pas.

On construit l'arborescence par niveau. On peut aussi dire que l'on a une canopée croissante qui tend vers l'infini (pour faire décroître l'effet de serre).

Au niveau 0, on met les éléments de M_0.

Au niveau n, on trouve des noeuds étiquetés par les éléments de M_n.

Les noeuds du niveau $n+1$ sont

– les noeuds étiquetés par les éléments de M_n inchangés,

– moins ceux étiquetés par les éléments du X_n utilisés,

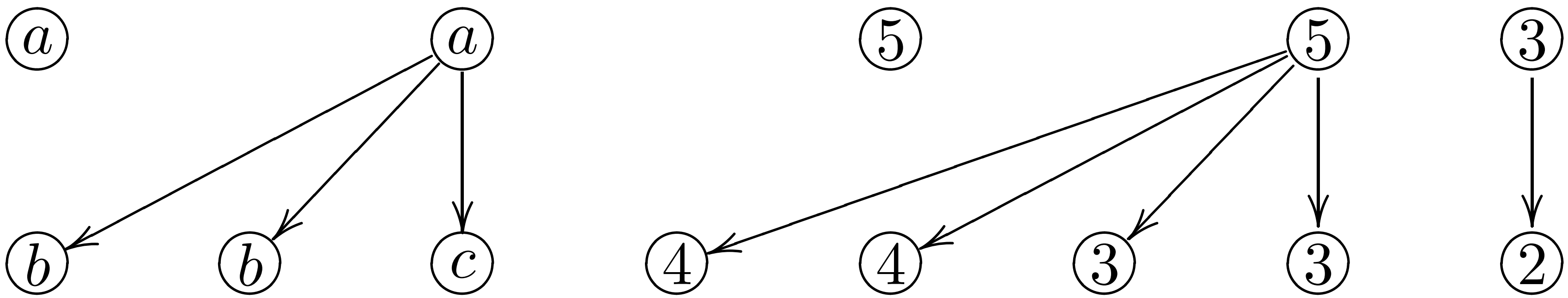
– plus ceux étiquetés par les éléments du Y_n utilisé, c-à-d les nouveaux venus dans M_{n+1}.

Soit

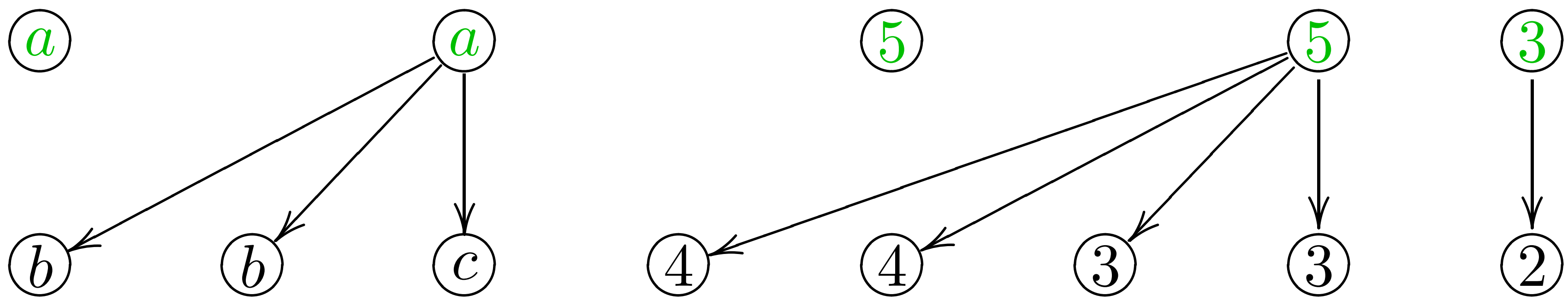
- $M_n = \{\!\{a, a, 5, 5, 3\}\!\}$
- $M_{n+1} = \{\!\{a, b, b, c, 5, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,
- $X_n = \{\!\{a, 5, 3\}\!\}$,
- $Y_n = \{\!\{b, b, c, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,

a		a		5		5	3
b	b	c	4	4	3	3	2

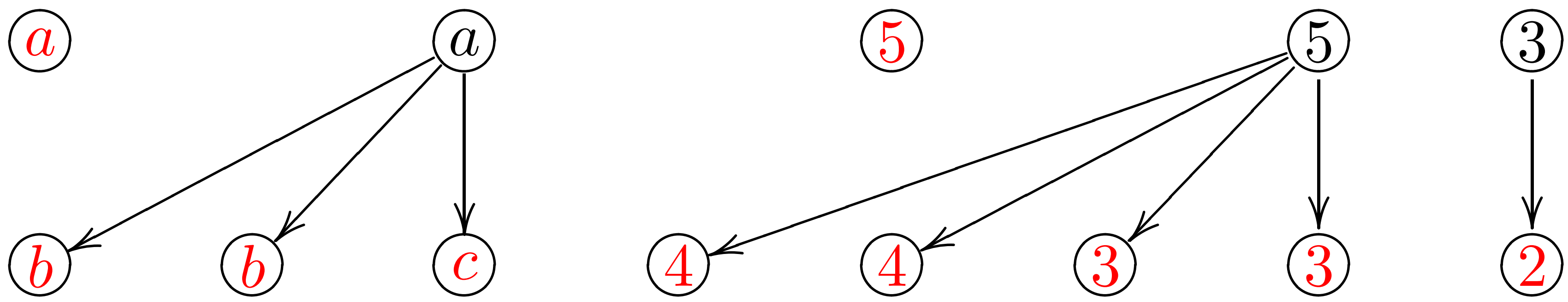
- $M_n = \{\!\{a, a, 5, 5, 3\}\!\}$
- $M_{n+1} = \{\!\{a, b, b, c, 5, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,
- $X_n = \{\!\{a, 5, 3\}\!\}$,
- $Y_n = \{\!\{b, b, c, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,



- $M_n = \{\!\{a, a, 5, 5, 3\}\!\}$
- $M_{n+1} = \{\!\{a, b, b, c, 5, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,
- $X_n = \{\!\{a, 5, 3\}\!\}$,
- $Y_n = \{\!\{b, b, c, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,



- $M_n = \{\!\{a, a, 5, 5, 3\}\!\}$
- $M_{n+1} = \{\!\{a, b, b, c, 5, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,
- $X_n = \{\!\{a, 5, 3\}\!\}$,
- $Y_n = \{\!\{b, b, c, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,



- $M_n = \{\!\{a, a, 5, 5, 3\}\!\}$
- $M_{n+1} = \{\!\{a, b, b, c, 5, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,
- $X_n = \{\!\{a, 5, 3\}\!\}$,
- $Y_n = \{\!\{b, b, c, 4, 4, 3, 3, 2\}\!\}$,

Le cas où $Y_n = \emptyset$ ne peut pas arriver indéfiniment à partir d'un certain rang n car, les M_n étant finis, cela serait contradictoire avec le fait que la suite est infinie.

Donc il y a une infinité d'étapes où l'on ajoute vraiment de nouveaux noeuds. Donc l'arbre est infini.

La construction montre que l'arbre est à branchement fini.

Les étiquettes sur un chemin forme une suite décroissante d'éléments de A. Comme $(A, >)$ termine, il n'y a pas chemins infinis.

N.B. Je n'ai pas utilisé $(A_\perp, >_\perp)$ comme dans le All that.

Prouver la confluence

Lemme de confluence locale

Si une relation est localement confluente,

alors elle est confluente.

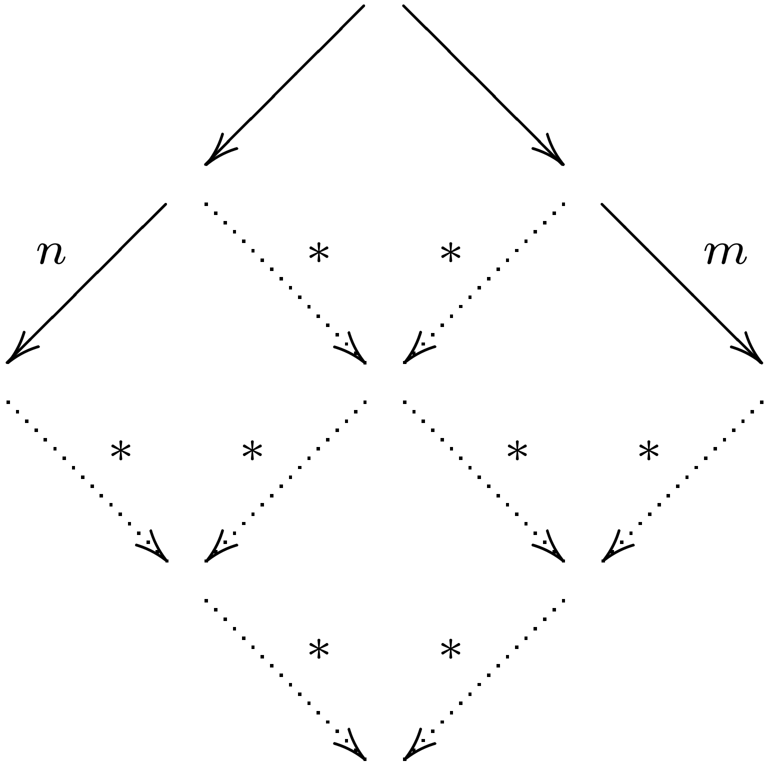
Lemme de confluence locale

Si une relation est localement confluente,

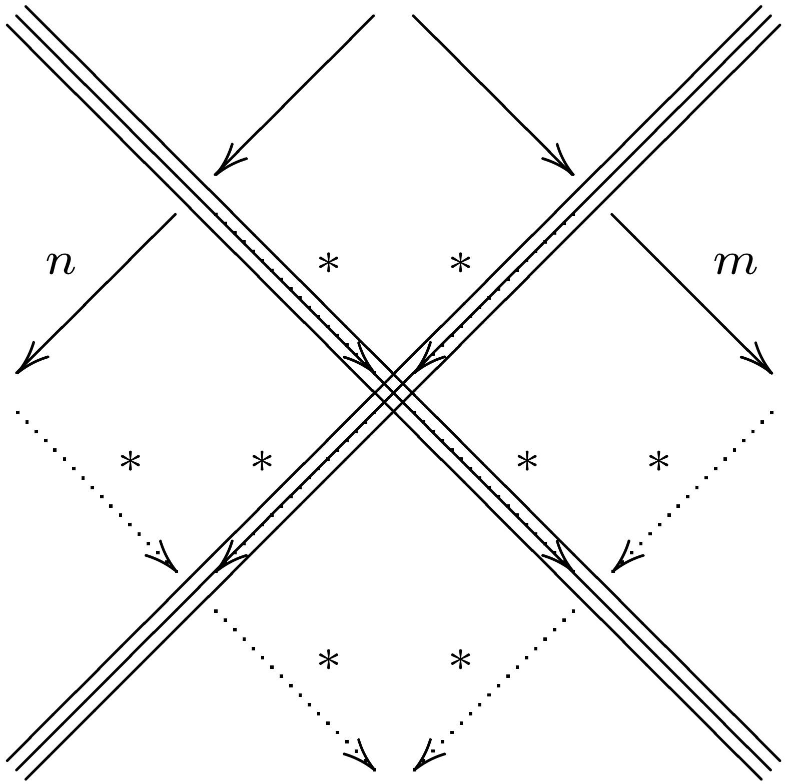
alors elle est confluente.

Par induction sur m et sur n ?

Lemme de confluence locale



Lemme de confluence locale



L'induction sur m et n ne fonctionne pas !

Il n’y a pas de lemme de confluence locale sans terminaison.

Le lemme de Newman

Si une relation termine et est localement confluente,

alors elle est confluente.

La terminaison est importante.

La terminaison est importante.

Les deux relations suivantes sont localement confluentes, mais non confluentes.

Une relation globalement finie, localement confluente et non confluente

La terminaison est importante.

Les deux relations suivantes sont localement confluentes, mais non confluentes.

Une relation globalement finie, localement confluente et non confluente

$$\begin{tikzcd} a & b \arrow[l] \arrow[r, bend left] & c \arrow[l, bend left] \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

La terminaison est importante.

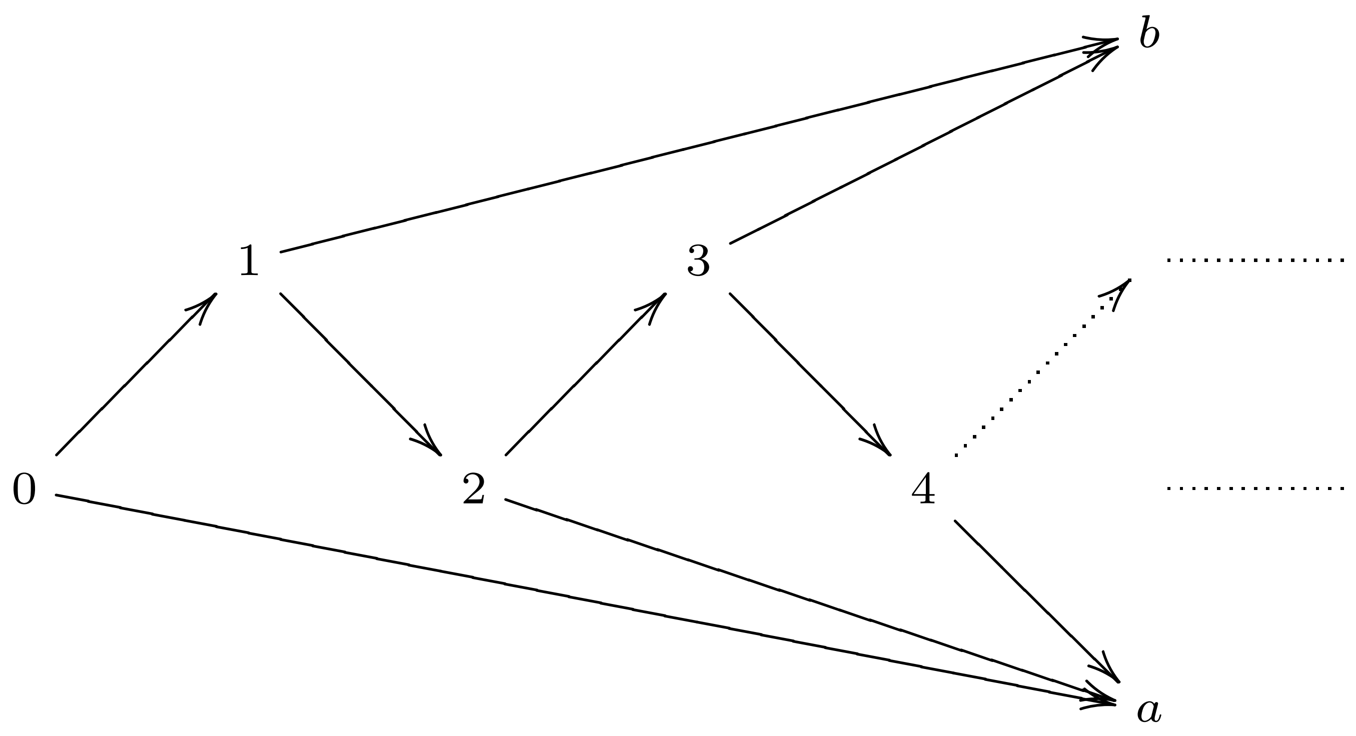
Une relation acyclique, localement confluente et non confluente

Soit la relation sur $\mathbb{N} \cup \{a, b\}$ définie par :

$n \longrightarrow n + 1$

Si n est pair, $n \longrightarrow a$.

Si n est impair, $n \longrightarrow b$.



Preuve du lemme de Newman

Si une relation termine et est localement confluente,

alors elle est confluente.

$$P(x) = (\forall y, z) y \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} z \Rightarrow y \downarrow z.$$

La confluence c'est $(\forall x) P(x)$.

Preuve du lemme de Newman

Si une relation termine et est localement confluente,

alors elle est confluente.

$$P(x) = (\forall y, z) y \xleftarrow{*} x \xrightarrow{*} z \Rightarrow y \downarrow z.$$

La confluence c'est $(\forall x) P(x)$.

On peut supposer sans nuire à la généralité que $x \xrightarrow{*} y$ et $x \xrightarrow{*} z$, prennent chacun au moins une étape de réduction

Preuve du lemme de Newman

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "CL"] & z_1 \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted, "*"] & z \arrow[dd, dotted, "*"] \\
y_1 \arrow[r, dotted, "*"] \arrow[d, "*"] \arrow[dr, phantom, "Ind"] & u \arrow[d, dotted, "*"] \arrow[r, phantom, "Ind"] & {} \\
y \arrow[r, dotted, "*"] & v \arrow[r, dotted, "*"] & w
\end{tikzcd}
$$

Forte confluence

Une relation est fortement confluente ssi

$$y_1 \longleftarrow x \longrightarrow y_2 \quad \Rightarrow \quad (\exists z) y_1 \xrightarrow{*} z \xleftarrow{=} y_2.$$

Forte confluence

Une relation est fortement confluente ssi

$$y_1 \longleftarrow x \longrightarrow y_2 \qquad \Rightarrow \qquad (\exists z) y_1 \xrightarrow{*} z \xleftarrow{=} y_2.$$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y_1 \arrow[dr, dotted, "*"] & & y_2 \arrow[dl, dotted] \\
 & z &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y_1 \arrow[rr, dotted, "*"] & & y_2
\end{tikzcd}$$

Forte confluence

$\boxed{\text{Une relation fortement confluence est confluente.}}$

On prouve que si une relation est fortement confluence alors elle est semi-confluente.

On fait une récurrence sur la longueur de la branche $\xrightarrow{*}$.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{FC}"] & {} \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted, "="] & {} \\ {} \arrow[r, dotted, "*"] & {} \end{tikzcd}$$

Forte confluence

Deux cas :

Cas $\xrightarrow{=} \; = \; \longrightarrow$.

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{FC}"] & {} \arrow[r, "*"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IND}"] & {} \arrow[d, dotted, "*"] \\
{} \arrow[r, dotted, "*"] & {} \arrow[r, dotted, "*"] & {}
\end{tikzcd}
$$

Forte confluence

Cas $\xrightarrow{=} \; = \; \xrightarrow{0}$.