# *Réécriture*

## Algèbres de termes

*version du 21 octobre 2004 – 19 h 31*

# L'ordre ***prefix***

L'ordre ***prefix*** est défini sur les mots de $A^*$ par.

$\alpha$ ***prefix*** $\beta$ si et seulement $(\exists\gamma \in A^*)\ \alpha\,\gamma = \beta$.

# Domaine d'un arbre enraciné étiqueté

$\mathbb{N}_\star = \mathbb{N} - \{0\}$

Un domaine d'arbre est un sous-ensemble fini non vide $D$ de $\mathbb{N}_\star^*$ tel que :

- $p \in D \quad \& \quad q$ ***prefix*** $p \quad \Rightarrow \quad q \in D$
- $pi \in D \quad \& \quad j \in \mathbb{N}_\star \quad \& \quad j < i \quad \Rightarrow \quad pj \in D$

REMARQUE : Tout domaine contient le mot vide.

## Arbre enraciné étiqueté

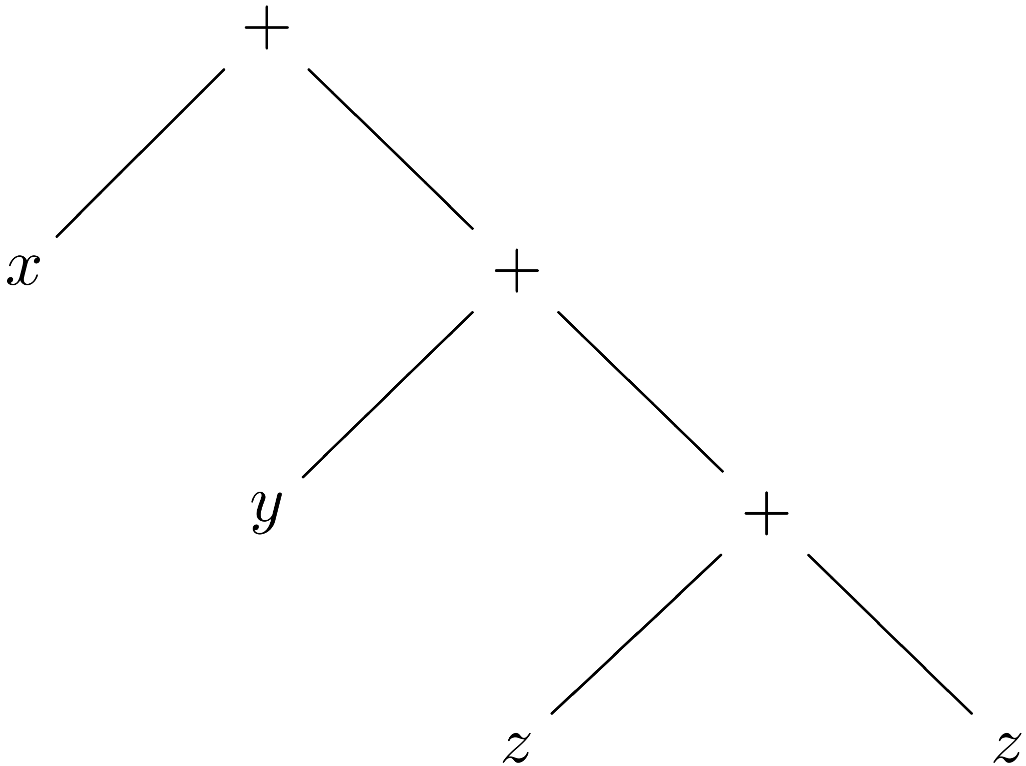
Un arbre étiqueté par $A$ est une application $T : D \longrightarrow A$ :

- $T(\epsilon)$ est la racine de l'arbre.
- $D$ est le domaine (ou l'ensemble des positions) de $T$ noté $Pos(T)$.
- $T(p)$ s'appelle l'étiquette à la position $p$.
- Si $p \in Pos(T)$ et $(\forall i \in \mathbb{N}_\star) pi \notin Pos(T)$, alors $p$ est une feuille de $T$.

Soit $TT$ tel que $Pos(TT) = \{\epsilon, 1, 2, 21, 22, 221, 222\}$ et :

$$\begin{aligned}
\epsilon &\mapsto + \\
1 &\mapsto x \\
2 &\mapsto + \\
21 &\mapsto y \\
22 &\mapsto + \\
221 &\mapsto z \\
222 &\mapsto z
\end{aligned}$$

$$TT =$$



## Sous-arbre

$T_{|p}$ est le sous-arbre à la position $p$ défini par $T_{|p}(q) = T(pq)$
où $Pos(T_{|p}) = \{q \mid pq \in Pos(T)\}$.

EXERCICE : Décrivez $Pos(TT_{|22})$ et $TT_{|22}$.

FAIT : $(T_{|p})_{|q} = T_{|pq}$.

# Remplacement

$T[U]_p$ est le remplacement du sous-arbre de $T$ à la position $p$ par l'arbre $U$, on le définit par

$$Pos(T[U]_p) = \{q \in Pos(T) \mid \neg(p\, \textbf{\textit{prefix}}\, q)\} \cup \{pp' \mid p' \in Pos(U)\}$$

et

$$T[U]_p(q) = \begin{cases} T(q) \text{ si } \neg(p\, \textbf{\textit{prefix}}\, q) \\ U(p') \text{ si } q = pp' \text{ avec } p' \in Pos(U) \end{cases}$$

EXERCICE : Soit $UU = TT[TT]_{21}$.

– Que vaut $UU(212)$ ?

– Dessinez $UU$.

RÉSULTATS :

– $T[U[V]_q]_p = T[U]_p[V]_{pq}$.

– $T[U]_p[V]_q = T[V]_q[U]_p$ si $p$ et $q$ sont étrangers[a]

[a] $p$ et $q$ sont dits étrangers, si $p$ n'est pas préfixe de $q$ et si $q$ n'est pas préfixe de $p$.

## Sous-arbre d'un remplacement

- Si $p$ et $q$ sont étrangers, alors $(T[U]_p)_{|q} = T_{|q}$.
- $(T[U]_p)_{|pp'} = U_{|p'}$.
- $(T[U]_{pp'})_{|p} = (T_{|p})[U]_{p'}$.

# Signature

Une signature est une famille d'ensembles $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$$

Si $f \in \Sigma_n$, $f$ est dit d'arité $n$.

$\Sigma_0$ est l'ensemble des constantes.

# Termes

Soit $X$ un ensemble dit ensemble des variables.

Quelques définitions :

* Un $\Sigma$-terme sur $X$ est un arbre $t$ étiqueté par $\Sigma \cup X$, tel que
  – Si $t(p) \in X$ alors $p$ est une feuille.
  – Si $t(p) \in \Sigma_n$ alors
    – $pn \in Pos(t)$ (donc $i \leq n \quad \& \quad i \in \mathbb{N}_\star \Rightarrow pi \in Pos(t)$)
    – et $p(n+1) \notin Pos(t)$.
* $T(\Sigma, X)$ est l'ensemble des $\Sigma$-termes sur $X$.
* $Var(t) = \{x \in X \mid (\exists p \in Pos(t))\ t(p) = x\}$

FAIT : Si $t(p) \in \Sigma_0$ alors $p$ est une feuille.

# $\Sigma$-algèbres

Une $\Sigma$-algèbre est un couple $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$ où

$A$ est un ensemble dit support de l'algèbre,

$$\Sigma^{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n^{\mathcal{A}}$$

et $f^{\mathcal{A}} \in \Sigma_n^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.

# $\Sigma$-algèbres libres

$T(\Sigma, X)$ munie des opérations d'enracinement est une algèbre.

Si $t_1 \ldots t_n$ sont $\Sigma$-termes sur $X$ et $f \in \Sigma_n$

on définit le terme $f(t_1, \ldots, t_n)$ obtenu

en enracinant $f$ sur $t_1, ..., t_n$ par

– $Pos(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} iPos(t_i)$

– $f(t_1, \ldots, t_n)(\varepsilon) = f$

– $f(t_1, \ldots, t_n)(ip) = t_i(p)$.

On dit que $T(\Sigma, X)$ est l'algèbre libre sur $X$.

$T(\Sigma) = T(\Sigma, \emptyset)$ est l'algèbre initiale.

# Algèbre initiale et induction structurelle

Pour prouver une propriété $(\forall t \in T(\Sigma))\, P(t)$ dans une algèbre initiale $T(\Sigma)$ on utilise l'induction structurelle.

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall f \in \Sigma_n)(\forall t_1 \in T(\Sigma))...(\forall t_n \in T(\Sigma))\\ (\bigwedge_{i=1}^{n} P(t_i) \Rightarrow P(f(t_1, ..., t_n)))\end{array}}{(\forall t \in T(\Sigma))\, P(t)}$$

## Algèbre initiale et induction structurelle

Autrement dit :

Pour vérifier une propriété sur toute l'algèbre initiale,

il faut vérifier que pour chaque opérateur $f$ d'arité $n$

la propriété se transpose des termes $t_i$

vers le terme $f(t_1, ..., t_n)$.

## Algèbre initiale et induction structurelle

Par exemple,

si $\Sigma_0 = \{\textsf{nil}\}, \Sigma_2 = \{\cdot\}, \Sigma_i = \emptyset$ pour $i = 1$ ou $i \geq 3$,

l'induction structurelle est

$$\frac{P(\textsf{nil}) \wedge \qquad (\forall t_1, t_2 \in T(\textsf{nil} \uplus \cdot))(P(t_1) \wedge P(t_2) \Rightarrow P(t_1 \cdot t_2))}{(\forall t \in T(\textsf{nil} \uplus \cdot))\, P(t)}$$

# Morphismes

Un morphisme $\varphi : T(\Sigma, X) \longrightarrow A$ est une application telle que

- $\varphi(x_i) = a_i$
- $\varphi(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\varphi(t_1), ..., \varphi(t_n))$.

# Substitutions, domaine, codomaine

Soit $X$ un ensemble dénombrable de variables.

* Une substitution est une application $\sigma : X \rightarrow T(\Sigma, X)$ qui est l'identité presque partout (c-à-d sauf sur un ensemble fini).
* On note : $Dom(\sigma) = \{x \in X) \mid x \neq \sigma(x)\}$

  le domaine.
* On note :

$$Range(\sigma) = \bigcup_{\sigma(x) \neq x} Var(\sigma(x)) = \{x \in Var(\sigma(x)) \mid x \neq \sigma(x)\}$$

  le codomaine.

## Substitutions, domaine, codomaine

On étend $\sigma$ à $T(\Sigma, X)$ en une application $\hat{\sigma}$ (souvent notée $\sigma$).

- $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$,
- $\hat{\sigma}(f(t_1, ..., t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), ..., \hat{\sigma}(t_n))$.

$Sub(T(\Sigma, X))$ est l'ensemble des substitutions.

# Identités et réduction

* Une identité $g \approx d$ est un couple, c'est-à-dire un élément de $T(\Sigma, X) \times T(\Sigma, X)$.
* Soit $E$ un ensemble d'identités, la contraction $\xrightarrow[E]{}$ est définie par

$$s \xrightarrow[E]{} t$$

ssi

$$(\exists g \approx d \in E)(\exists \sigma \in Sub(T(\Sigma, X)))(\exists p \in Pos(s))$$

et

$$s_{|p} = \sigma(g) \quad \& \quad t = s[\sigma(d)]_p.$$

# Systèmes de réécriture

D'autres définitions :

- Une règle de réécriture est une identité $g \approx d$ telle que $Var(g) \supseteq Var(d)$.

  On écrit $g \longrightarrow d$.

- Un système de réécriture est un ensemble de règles de réécriture.
- Un redex de $s$ est une instance (c'est-à-dire un sous-terme de $s$ de la forme $\sigma(g)$ pour $\sigma \in Sub(T(\Sigma, X))$) d'un membre gauche de règle de réécriture $g \longrightarrow d$.
- Contracter le redex $s_{|p}$ à la position $p$,

  c'est passer de $s = s[\sigma(g)]_p$ à $t = s[\sigma(d)]_p$.