TD de Sémantique – 2

27 septembre 2002

Exercice 1

1. Soit $(E, \to)$ un système de réécriture abstrait. Donner trois formulations de Church Rosser. Montrer que la propriété diamant implique Church Rosser. Montrer que la confluence locale et la normalisation forte impliquent Church Rosser (lemme de Newman). Définir la forme normale. Donner un exemple de système localement confluent non confluent.
2. On suppose que $\to$ est acyclique et à branchement fini; montrer que $e \in E$ termine ssi il n'a qu'un nombre fini de réduits (lemme de Kœnig).
3. On rappelle le lemme de projection pour $\lambda\upsilon$: si $M \to_{\lambda\upsilon} N$ alors $\upsilon(M) \to_\beta^* \upsilon(N)$. Montrer comment ce lemme implique la confluence de $\lambda\upsilon$

Exercice 2
On se place dans le système $\lambda\upsilon$:

$$
\begin{array}{rcll}
(\lambda M)N & \to & M[N/] & (B) \\
(M\,N)[s] & \to & (M[s]\,N[s]) & (App) \\
(\lambda M)[s] & \to & (\lambda M[s]) & (Lambda) \\
0[M/] & \to & M & (FVar) \\
n+1[M/] & \to & n & (RVar) \\
0[\Uparrow s] & \to & 0 & (FVarLift) \\
n+1[\Uparrow s] & \to & n[s][\uparrow] & (RVarLift) \\
n[\uparrow] & \to & n+1 & (VarShift)
\end{array}
$$

1. Donner l'encodage de I et Ω, vérifier que $\Omega \to^* \Omega$.
2. Etablir le lemme de projection

Exercice 3

1. Donner le type Caml des λ-termes du système $\lambda\upsilon$.
2. On se propose de représenter en Caml les formules de la logique du premier ordre dans un type de la forme ("syntaxe abstraite d'ordre supérieur")

   ```
   type formula = Forall of var->formula | ...
   ```

   (a) Achever de définir le type `formula` (on prendre par exemple un seul symbole de prédicat unaire). Définir la fonction `test (var->bool)->formula->bool` telle que `test p` donne la sémantique des formules dans l'interprétation `p` du prédicat. Définir les fonctions de conversion `hoas_to_db` et `db_to_hoas`. Réfléchir à des conditions de "bonne conformation".

   (b) Définir de même le type `lambda` des lambda termes de manière a rendre la substitution fonctionnelle. Montrer qu'un tel type et des opérations Caml "élémentaires" permettent de construire une fonction divergente.

Exercice 4
On se propose d'enrichir le système $\lambda\upsilon$ pour prendre en compte la composition. On considère ainsi la syntaxe

$$\begin{array}{rcll} M, N & ::= & \lambda M \mid M\,N \mid M[s] & (\mathit{termes}) \\ s, t & ::= & M/ \mid s \circ t \mid \Uparrow s \mid \uparrow & (\mathit{substitutions}) \end{array}$$

et le système $\lambda\upsilon$ enrichi de la règle

$$M[s][t] \;\rightarrow\; M[s \circ t] \qquad (\mathit{Clos})$$

1. Montrer que la résolution des paires critiques introduit les règles suivantes:

$$\begin{array}{rcll} (s \circ t) \circ u & \rightarrow & s \circ (t \circ u) & (\mathit{AssEnv}) \\ M/ \circ s & \rightarrow & (\Uparrow s) \circ M[s]/ & (\mathit{MapSl}) \\ 0[M/] & \rightarrow & M & (\mathit{FVar}) \\ 0[(\Uparrow s) \circ t] & \rightarrow & 0[t] & (\mathit{FVarLift2}) \\ \uparrow \circ (\Uparrow s) & \rightarrow & s \circ \uparrow & (\mathit{ShiftLift1}) \\ \uparrow \circ ((\Uparrow s) \circ t) & \rightarrow & s \circ (\uparrow \circ t) & (\mathit{ShiftLift2}) \\ (\Uparrow s) \circ (\Uparrow t) & \rightarrow & \Uparrow (s \circ t) & (\mathit{Lift1}) \\ (\Uparrow s) \circ ((\Uparrow t) \circ u) & \rightarrow & (\Uparrow (s \circ t)) \circ u & (\mathit{Lift2}) \end{array}$$

2. On s'intéresse à la PSN de ce système:

   (a) Soient M_0, N_0 deux termes et $M_{n+1} = N_n$, $N_{n+1} = M_n[\uparrow \circ N_n]$. Montrer que $\uparrow \circ (M_n/(\uparrow \circ N_n/)) \;\rightarrow^*\; \uparrow \circ (M_{n+1}/ \circ (\uparrow \circ N_{n+1}/))$.

   (b) En déduire que le terme $\lambda x((\lambda yz.x)\,x\,x)$ admet une réduction infinie.