Histoire des algorithmes

version du 20 avril 2004 – 10 h 03

à Balthazar

Quatre étapes significatives

-1800, les Babyloniens, les pionniers,

-300, l’algorithme d’Euclide, le premier véritable algorithme,

1940, l’émergence des fonctions calculables à Princeton,

1980, la correspondance de Curry-Howard, la grande révolution que nous vivons.

Je ne parlerai pas de

– Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, ca 800-847, près de Bagdad,

d'où vient le nom d'algorithme

– Léonard de Pise (Fibonacci) ca 1175-1250,

popularisateur en Europe des sciences arabes et égyptiennes.

Je ne parlerai pas d'algorithmique indienne et chinoise.

Je ne parlerai pas de

– Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, ca 800-847, près de Bagdad,

d'où vient le nom d'algorithme

– Léonard de Pise (Fibonacci) ca 1175-1250,

popularisateur en Europe des sciences arabes et égyptiennes.

Je ne parlerai pas d'algorithmique indienne et chinoise.

et maya et inca.

Les anciens algorithmes babyloniens

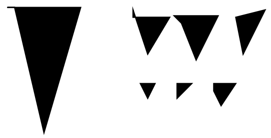
d’après Don Knuth,

Selected papers on computer science

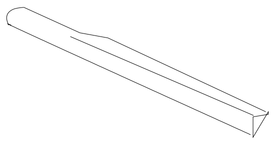
L’écriture cunéiforme

L’écriture, appelée cunéiforme, «en forme de coin»,

– est formée de petits triangles tracés sur des tablettes d’argile.



– est tracée avec un calame, baton de roseau.



Elle remonte à 3 000 av J. C.

L'écriture cunéiforme

Le site de la Cuneiform digital library initiative

– `http://cdli.ucla.edu/`

– (et son miroir
`http://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/`),

associe les principaux musées du monde qui ont des tablettes cunéiformes et donne accès sous forme électronique à ces tablettes.

L’écriture cunéiforme

L’on trouve déjà des tablettes très intéressantes du point de vue mathématique et algorithmique dès la dynastie d’Hammourabi de 1 800 à 1 600 av. J. C.

Hammourabi est très connu aussi pour son code qui est l’un des plus anciens document de droit connu.

La numération

La base de calcul est sexagésimale, c'est-à-dire à base 60 (un héritage des Sumériens)

Nous en avons gardé

– les heures

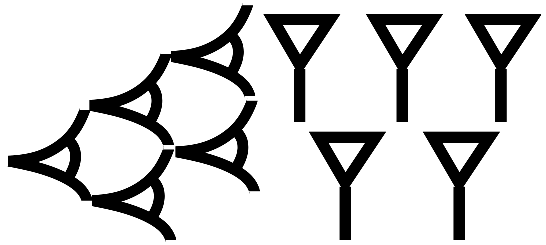
– et les angles

Les chiffres sont composites fondés sur un sous-système décimal.

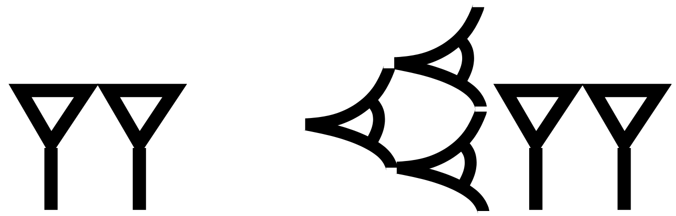
– le signe 𒁹 pour le chiffre **un**,

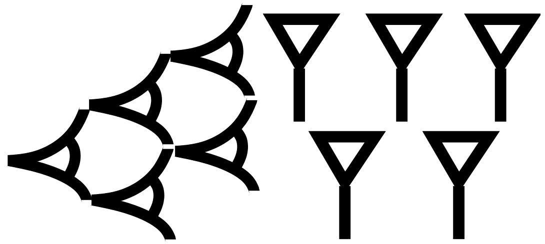
– le signe 𒌋 pour le chiffre **dix**.

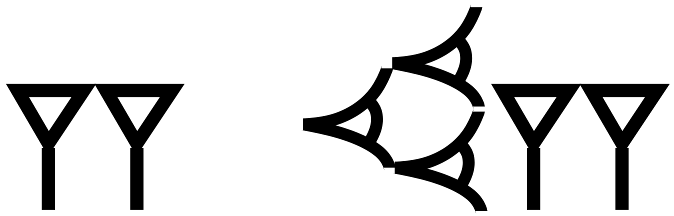
$$55 \quad =$$

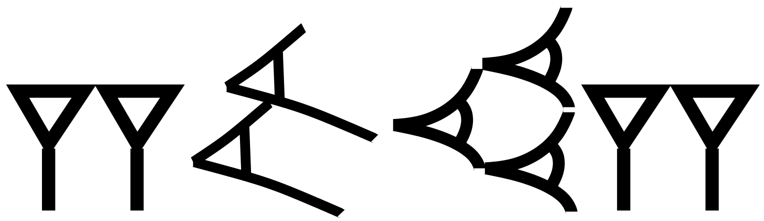


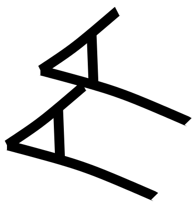
$$7\,232 \quad =$$



$55 =$ 

$7\,232 =$ 

$=$ 

où  est le zéro.

Nous écrirons

$$\begin{aligned} 55 &= [55] \\ 7\,232 &= [2;0;32] \end{aligned}$$

La numération

Le système est à virgule flottante, donc avec exposant et mantisse.

La numération

Le système est à virgule flottante, donc avec exposant et mantisse.

Mais les Babyloniens n'écrivent pas les exposants.

La numération

Ainsi le nombre à deux chiffres : $[2;20]$ signifie aussi bien

- $2 \times 60 + 20 = 140$,
- ou $2 + 20/60 = 2\frac{1}{3}$,
- ou $2/60 + 20/3600$,
- et plus généralement 140×60^n.

La numération

Ainsi le nombre à deux chiffres : $[2; 20]$ signifie aussi bien

- $2 \times 60 + 20 = 140$,
- ou $2 + 20/60 = 2\frac{1}{3}$,
- ou $2/60 + 20/3600$,
- et plus généralement 140×60^n.

Le système est astucieux, car c'est un excellent système pour multiplier et diviser.

La numération

Ainsi le nombre à deux chiffres : $[2; 20]$ signifie aussi bien

– $2 \times 60 + 20 = 140$,

– ou $2 + 20/60 = 2\frac{1}{3}$,

– ou $2/60 + 20/3600$,

– et plus généralement 140×60^n.

Le système est astucieux, car c'est un excellent système pour

multiplier et diviser,

comme le savent nos concepteurs d'ordinateurs.

La numération

Le mathématicien babylonien calcule avec des nombres qui ont un sens pour lui.

Il garde à l'esprit la bonne puissance de 60 en se fiant sur son intuition.

Donc

$$
\begin{aligned}
55 &= 3\,300 = 11/12 = [55] \\
7\,232 &= 120 + 8/15 = [2;0;32]
\end{aligned}
$$

Le période du Babylonien ancien

Les inverses

Les tables d’inverses jouent un rôle fondamental, car elles permettent d’effectuer systématiquement les divisions.

Les inverses

2	30	16	$3;45$	45	$1;20$
3	20	18	$3;20$	48	$1;15$
4	15	20		50	$1;12$
5	12	24		54	$1;6;40$
6	10	25		1	1
8	$7;30$	27		$1;4$	$56;15$
9	$6;40$	30		50	
10	6	32		$1;15$	48
12	5	36	$1;40$	$1;20$	45
15	4	40	30	$1;21$	$44;26;40$

Les inverses

$$20 \rightsquigarrow 3$$

$$24 \rightsquigarrow 60/24 = 2;12/24 = 2;1/2 = 2;30$$

$$25 \rightsquigarrow 60/25 = 2;10/25 = 2;2/5 = 2;120/20 = 2;24$$

$$27 \rightsquigarrow 60/27 = 2;6/27 = 2;120/9 = 2;13;3/9 = 2;13;20$$

$$30 \rightsquigarrow 2$$

$$32 \rightsquigarrow 1;28/32 = 1;7/8 = 1;420/8 = 1;52;4/8 = 1;52;1/2 = 1;52;30$$

Les inverses

2	30	16	3; 45	45	1; 20
3	20	18	3; 20	48	1; 15
4	15	20	3	50	1; 12
5	12	24	2; 30	54	1; 6; 40
6	10	25	2; 24	1	1
8	7; 30	27	2; 13; 20	1; 4	56; 15
9	6; 40	30	2	1; 12	50
10	6	32	1; 52; 30	1; 15	48
12	5	36	1; 40	1; 20	45
15	4	40	30	1; 21	44; 26; 40

Les inverses

Des douzaines de tablettes des inverses ont été retrouvées jusqu'à la dynastie Ur III de 2500 avant J.C.

Programmation babylonienne

Pas de formules algébriques, mais la description étape par étape d’un processus de calcul.

L’auteur décrit un véritable algorithme à partir d’un exemple.

Un calcul de citerne

Les «algorithmes» qui suivent proviennent de deux fragments de la même tablette :

– la moitié BM 85194 (British Museum) (ou BM 85200)

– un quart VAT6599 (Vorderasiatisches Museums de Berlin)

le dernier quart est perdu.

Une citerne (rectangulaire).

La hauteur est $3;20$ et un volume de $27;46;40$ a été creusé.

La longueur dépasse la largeur de 50.

Le but est de trouver la longueur et la largeur.

Prends l'inverse de la hauteur $3;20$ pour obtenir 18.

Multiplie ce nombre par le volume $27;46;40$ et tu obtiens $8;20$.

On connaˆıt maintenant $L-l=50$ et $L\times l=8;20$.

Prends la moitié de 50 et calcule son carré, tu obtiens $10;25$.

Ajoute $8;20$ et tu obtiens $8;30;25$. Le calculateur rétablit l'exposant.

La racine carrée est $2;55$. $(L+l)/2$.

Fais deux copies de ce nombre, tu ajoutes 25 au premier et tu le retires du second.

Tu trouves que $3;20$ est la la longueur et $2;30$ est la la largeur.

Ceci est la procédure.

Une citerne.

La longueur (en cubits) égale la hauteur (en jarre) $1 \text{ jarre} = 12 \text{ cubits.}$

Un certain volume de terre a été creusé.

L'aire de la section (en cubits carrés) plus le volume (en cubits cubes) donne $1; 10$.

La longueur est 30. Quelle est la largeur ?

Tu dois multiplier la longueur 30 par 12, tu obtiens 6 ; c'est la hauteur.

Ajoute 1 à 6, tu obtiens 7

L'inverse n'existe pas ;

qu'est-ce qui donne $1; 10$ quand on le multiplie par 7 ? 10 convient.

Donc l'aire de la section est 10 soit $\frac{1}{6}$ cubits carrés.

Prends l'inverse de 30, tu obtiens 2.

Multiplie 10 par 2, tu obtiens la largeur, 20. À savoir $\frac{1}{3}$ de cubit.

Ceci est la procédure.

Divisions par 7 et autres divisions

On a besoin de diviser par 7,

mais l'inverse de 7 n'existe pas dans les tables.

cela indique que les tables de multiplication étaient utilisées à l'envers.

Pour des divisions plus difficiles, une formulation légèrement différente était utilisée (utilisaient-ils une procédure spécifique ?)

De toutes façons les Babyloniens étaient capables de calculer des divisions comme

$$7 \div 2;6 \qquad 28;30 \div 17 \qquad 10;12;45 \div 40;51.$$

Le période Séleucide

Au delà de la présentation d’algorithmes par exemple

L’algorithme qui suit (BM 34568) est de l’ère Séleucide, mais est beaucoup plus élaboré.

Deux versions sur des exemples et une version «abstraite».

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est $1;10$

et l'aire est 7.

Quelle sont la longueur, la largeur et la diagonale correspondantes ?

Les quantités sont inconnues.

$1;10$ fois $1;10$ vaut $1;21;40$.

7 fois 2 vaut 14.

Retire 14 de $1;21;40$, reste $1;7;40$.

Par quoi doit-on multiplier $1;10$ pour obtenir $33;50$?

$1;10$ fois 29 égale $33;50$.

29 est la diagonale.

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est $1;10$ et l'aire est 7. $L+l+d=1;10$ et $d^2=L^2+l^2$ et $Ll=7$.

Quelle sont la longueur, la largeur et la diagonale correspondantes ?

Les quantités sont inconnues.

$1,10$ fois $1;10$ vaut $1;21;40$. $(L+l+d)^2=1;21;40$

7 fois 2 vaut 14. $2Ll=14$

Retire 14 de $1;21;40$, reste $1;7;40$.

$$(L+l+d)^2-2Ll=2d(L+l+d)=1;7;40$$

$1;7;40$ fois 30 vaut $33;50$. $d(L+l+d)=33;50$

Par quoi doit-on multiplier $1;10$ pour obtenir $33;50$?

$1;10$ fois 29 égale $33;50$.

29 est la diagonale.

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est 12

et l'aire est 12.

Quelle sont la longueur, la largeur et la diagonale correspondantes ?

Les quantités sont inconnues.

12 fois 12 vaut $2; 24$.

12 fois 2 vaut 24.

Retire 24 de $2; 24$, reste 2.

2 fois 30 vaut 1.

Par quoi doit-on multiplier 12 pour obtenir 1 ?

12 fois 5 égale 1.

5 est la diagonale.

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est 1

et l'aire est 5.

Multiplie la longueur, la largeur et la diagonale par la longueur, la largeur et la diagonale.

Multiplie l'aire par 2.

Soustrait le produit et multiplie ce qui reste par un demi.

Par quoi doit-on multiplier la somme de la longueur, la largeur et la diagonale pour obtenir ce produit ?

La diagonale est ce facteur.

$$\begin{aligned}(L+l+d)^2-2Ll &= L^2+l^2+d^2+2Ld+2ld\\ &= 2d^2+2Ld+2ld\\ &= 2d(L+l+d).\end{aligned}$$

Les Babyloniens connaissaient la formule de Pythagore 1 000 ans avant lui.

L'algorithme ne dit pas comment calculer L et l, qui nécessite de résoudre

$$\begin{aligned}L^2+l^2 &= a\\ L+l &= b.\end{aligned}$$

Clairement les Babyloniens savaient le faire.

La dernière version est la même, mais sans nombres.

On a l'impression que l'auteur ne sait pas quelle puissance de 60 attribuer aux données du problème [a].

Ça ressemble à une copie d'examen où l'étudiant aurait été incapable de résoudre l'application numérique.

[a] Il y a une solution entière avec $L + l + d = 1.60$ et $Ll = 5.60$.

Un autre algorithme sans nombres

Ces présentations d'algorithmes sont rares.

En voici cependant une de la période babylonienne ancienne (Louvre tablette A0 6770).

La (somme de la) longueur et la largeur est égale à l'aire.

Tu dois faire comme suit.

Fais deux copies du paramètre.

Retire 1.

Forme l'inverse.

Multiplie par le paramètre que tu as copié.

Cela donne la largeur.

La (somme de la) longueur et la largeur est égale à l'aire.

Tu dois faire comme suit.

Fais deux copies du paramètre.

Retire 1. $L - 1$

Forme l'inverse. $1/(L-1)$

Multiplie par le paramètre que tu as copié. $L/(L-1)$

Cela donne la largeur. $l = L/(L-1)$

En effet, si $L + l = L \times l$
on a $(L-1) \times l = L$ et $l = L/(L-1)$.

Commentaires

Cet algorithme est longtemps resté obscur.

Le fait de copier les résultats fonctionne comme un machine à pile.

Cela démontre que le processus de calcul détruisait les opérandes.

On trouve aussi la phrase «Garde ce nombre dans ta tête»

C'est l'idée de mémoire en informatique.

et la phrase «Remplace la somme de la longueur et de la largeur par 30 fois elle-même».

C'est l'affectation $x := x/2$.

La période Séleucide

Pas de tablettes de 1 600 av J.C à 300 av J.C.

Un grand nombre de tablettes à cette période :

– usage du zéro,

– la tradition de l'ancien Babylonien a été conservée,

– des mathématiques plus avancées.

La période Séleucide

Deux extraits d'un tablette AO 6484 du Musée du Louvre

De 1 à 10 somme les puissances de 2.

Le dernier terme que tu ajoutes est $8;32$.

Soustrais 1 de $8;32$, tu obtiens $8;31$.

Ajoute $8;31$ à $8;32$, tu obtiens la réponse $17;3$.

De 1 à 10 somme les puissances de 2.

Le dernier terme que tu ajoutes est $8; 32$.

Soustrais 1 de $8; 32$, tu obtiens $8; 31$.

Ajoute $8; 31$ à $8; 32$, tu obtiens la réponse $17; 3$.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^n + (2^n - 1).$$

Les carrés de 1×1 à 10×10 ; quelle est leur somme ?

Multiplie 1 par 20, donne 20.

Multiplie 10 par 40, donne $6; 40$.

$6; 40$ plus 20 est 7.

Multiplie 7 par 55 (qui est la somme de 1 à 10), tu obtiens $6; 25$.

$6; 25$ est la somme désirée.

Les carrés de 1×1 à 10×10 ; quelle est leur somme ?

Multiplie 1 par 20, donne 20. $\frac{1}{3}$

Multiplie 10 par 40, donne $6;40$. $\frac{2}{3}n$

$6;40$ plus 20 est 7. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

Multiplie 7 par 55 (qui est la somme de 1 à 10), tu obtiens $6;25$.

$(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n) \sum_{k=1}^{n} k$

$6;25$ est la somme désirée.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n) \sum_{k=1}^{n} k.$$

Tables d’inverses à 6 «chiffres»

La table d’Inakibit-Anu : table du Musée du Louvre AO 6456.

Par le pouvoir de Anu et Antum, ce que j’ai fait avec mes mains, qu’il reste intact.

L'inverse de	1	est	1
L'inverse de	$1;0;16;53;53;20$	est	$59;43;10;50;52;48$
L'inverse de	$1;0;40;53;20$	est	$59;19;34;13;7;30$
L'inverse de	$1;0;45$	est	$59;15;33;20$
L'inverse de	$1;1;2;6;33;45$	est	$58;58;56;33;45$ devrait être $58;58;56;38;24$
L'inverse de	$1;1;26;24$	est	$58;35;37;30$
L'inverse de	$1;1;30;33;45$	est	$58;31;39;35;18;31;6;40$
L'inverse de	$2;46;40$	est	$21;36$
L'inverse de	$2;48;45$	est	$21;20$
L'inverse de	$2;55;46;52;30$	est	$20;28;48$
L'inverse de	$2;57;46;40$	est	$20;0;15$ devrait être $20;15$

Quelques statistiques

105 entrées.

75% de toutes les possibilités à 6 chiffres.

La table contient 20 entrées qui ont plus de 6 chiffres.

Elle ne liste que 31 des 87 entrées possibles qui commencent par 2.

> Manque d'espace !
>
> Manquent des cas simples comme $2; 30$ et de $2; 40$.

Comment la table est-elle construite ?

La table d'Inakibit-Anu contient 20 entrées qui ont plus de six chiffres sexagésimaux. Ils proviennent probablement d'une autre table, car on y trouve :

$$\{2^{17}, 30^{17}\}, \quad \{2^{23}, 30^{23}\}$$

$$\{3^{11}, 20^{11}\}, \quad \{3^{18}, 20^{18}\}, \quad \{3^{22}, 20^{22}\}, \quad \{3^{23}, 20^{23}\}$$

ainsi que tous les $\{2^k, 30^k\}$ et les $\{3^k, 20^k\}$ pour lequel

– l'un des éléments a un chiffre principal 1 ou 2

– et pour lequel le plus petit élément a au plus 6 chiffres.

Comment la table est-elle construite ?

La plus simple procédure consiste à partir de $(1, 1)$ et ensuite à procéder répétitivement

de (x, y) à $(2x, 30y)$, $(3x, 20y)$ et $(5x, 12y)$.

Il semble qu'Inakibit-Anu ait procédé ainsi.

Pour construire une table à 6 chiffres il faut engendrer 721 pairs (x, y).

La complétude relative des trois premières colonnes montre qu'Inakibit-Anu a préparé une base de données de 500 paires (x, y).

Comment la table est-elle construite ?

La plus simple procédure consiste à partir de $(1, 1)$ et ensuite à précéder répétitivement

de (x, y) à $(2x, 30y)$, $(3x, 20y)$ et $(5x, 12y)$.

Il semble qu'Inakibit-Anu ait procédé ainsi.

Pour construire une table à 6 chiffres il faut engendrer 721 pairs (x, y).

La complétude relative des trois premières colonnes montre qu'Inakibit-Anu a préparé une base de données de 500 paires (x, y).

Mais ensuite il faut trier ces entrées !

Voyez l'article de Knuth pour voir comment, il a pu procéder.