SUBSTITUTIONS EXPLICITES
ET
FORTE NORMALISATION

Pierre LESCANNE

Un calcul de substitutions explicites

La syntaxe

$$\text{terms} \quad t \quad ::= \quad x \mid tt \mid \lambda x \cdot t \mid t\langle \vec{x} := \vec{t} \rangle$$

Les règles

$$\begin{array}{rcl}
\lambda x \cdot A & \longrightarrow & A\langle x := B\rangle \\
(AB)\langle x := C\rangle & \longrightarrow & (A\langle x := C\rangle)(B\langle x := C\rangle) \\
(\lambda y \cdot)\langle x := C\rangle & \longrightarrow & \lambda y \cdot \langle x := C\rangle \text{ if } x \not\equiv y \text{ and } y \notin FV(C) \\
x\langle x := C\rangle & \longrightarrow & C \\
A\langle x := C\rangle & \longrightarrow & A \text{ if } x \notin FV(C)
\end{array}$$

Une sorte de composition

$$A\langle \vec{x} := \vec{B}\rangle\langle \vec{y} := \vec{C}\rangle \quad \longrightarrow \quad A\langle \vec{x}, \vec{y} := B_1\langle \vec{y} := \vec{C}\rangle, \ldots, B_m\langle \vec{y} := \vec{C}\rangle, \vec{C}\rangle$$

Dans la suite nous utiliserons la règle plus simple

$$A\langle x := B\rangle\langle y := C\rangle \quad \longrightarrow \quad A\langle x := B\langle y := C\rangle\rangle \quad \text{si } y \in FV(A)$$

L'exemple

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \langle y := (\lambda y \cdot a)b \rangle \\
\alpha_{m+1} &= \langle y := b\alpha_m \rangle
\end{aligned}
$$

L'exemple (suite)

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{((\lambda y \cdot \lambda y' \cdot x)((\lambda y \cdot a)b))\ ((\lambda y \cdot a)b)} \\
\twoheadrightarrow & x\langle y' := (\lambda y \cdot a)b\rangle\langle y := (\lambda y \cdot a)b\rangle \\
\longrightarrow & x\langle y' := ((\lambda y \cdot a)b)\langle y := (\lambda y \cdot a)b\rangle\rangle \\
\twoheadrightarrow & x\langle y' := (\lambda y \cdot a\langle y := (\lambda y \cdot a)b\rangle)(b\langle y := (\lambda y \cdot a)b\rangle)\rangle \\
\equiv & x\langle y' := (\lambda y \cdot a\alpha_0)(b\alpha_0)\rangle \\
\longrightarrow & x\langle y' := a\alpha_0\langle y := b\alpha_0\rangle\rangle \\
\equiv & x\langle y' := a\alpha_0\alpha_1\rangle
\end{array}
$$

L'exemple (suite)

$$
\begin{array}{lcl}
a\alpha_0\alpha_{m+1} & \equiv & a\langle y := (\lambda y \cdot a)b\rangle\langle y := b\alpha_m\rangle \\
 & \longrightarrow & a\langle y' := ((\lambda y \cdot a)b)\langle y := b\alpha_m\rangle\rangle \\
 & \twoheadrightarrow & a\langle y' := (\lambda y \cdot a\langle y := b\alpha_m\rangle)\; b\langle y := b\alpha_m\rangle\rangle \\
 & \equiv & a\langle y' := (\lambda y \cdot a\alpha_{m+1})\; b\alpha m + 1\rangle \\
 & \longrightarrow & a\langle y' := a\alpha_{m+1}\langle y := b\alpha_{m+1}\rangle\rangle \\
 & \equiv & a\langle y' := a\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\rangle
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
a\alpha_{p+1}\alpha_{m+1} & \equiv & a\langle y' := b\alpha_p\rangle\langle y := b\alpha_m\rangle \\
 & \longrightarrow & a\langle y' := b\alpha_p\langle y := b\alpha_m\rangle\rangle \\
 & \equiv & a\langle y' := b\alpha_p\alpha_{m+1}\rangle
\end{array}
$$

L'exemple (suite)

Et l'on obtient la dérivation infinie:

$$((\lambda y \cdot \lambda y' \cdot x)((\lambda y \cdot a)b))\ ((\lambda y \cdot a)b)$$

$$\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_0\alpha_1 \ldots \longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_1\alpha_2 \ldots \longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_0\alpha_2 \ldots$$

$$\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_2\alpha_3 \ldots \longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_1\alpha_3 \ldots \longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_0\alpha_3 \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\twoheadrightarrow \ldots a\alpha_0\alpha_{m+1} \ldots \twoheadrightarrow \ldots a\alpha_{m+1}\alpha_{m+2} \ldots \twoheadrightarrow \ldots a\alpha_0\alpha_{m+2} \ldots$$

$\boxed{\lambda\upsilon}$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(B)} & (\lambda a)b & \rightarrow & a[b/] \\
\text{(App)} & (ab)[s] & \rightarrow & a[s]b[s] \\
\text{(Lambda)} & (\lambda a)[s] & \rightarrow & \lambda(a[\Uparrow(s)]) \\
\text{(FVar)} & \underline{1}[a/] & \rightarrow & a \\
\text{(RVar)} & \underline{n+1}[a/] & \rightarrow & \underline{n} \\
\text{(FVarLift)} & \underline{1}[\Uparrow(s)] & \rightarrow & \underline{1} \\
\text{(RVarLift)} & \underline{n+1}[\Uparrow(s)] & \rightarrow & \underline{n}[s][\uparrow] \\
\text{(VarShift)} & \underline{n}[\uparrow] & \rightarrow & \underline{n+1}
\end{array}
$$

Les termes

$$\begin{array}{llll}
\textbf{Terms}_{\upsilon} & a & ::= & \underline{n} \mid aa \mid \lambda a \mid a[s] \\
\textbf{Substitutions}_{\upsilon} & s & ::= & a/ \mid \Uparrow(s) \mid \uparrow \\
\textbf{Naturals} & n & ::= & n+1 \mid 1.
\end{array}$$

Les substitutions

slash

$$a/ : \quad \begin{array}{rcl} \underline{1} & \mapsto & a, \\ \underline{2} & \mapsto & \underline{1}, \\ & \vdots & \\ \underline{i+1} & \mapsto & \underline{i}, \\ & \vdots & \end{array}$$

Slash affecte un terme.

Les substitutions

shift

$$\begin{array}{rccc} \uparrow: & \underline{1} & \mapsto & \underline{2} \\ & \underline{2} & \mapsto & \underline{3} \\ & & \vdots & \\ & \underline{i} & \mapsto & \underline{i+1} \\ & & \vdots & \end{array}$$

$$\underline{n} \equiv \underline{1}[\uparrow^n]$$

Les Substitutions

Lift

$$\Uparrow(s): \quad \begin{array}{rcl} \underline{1} & \mapsto & \underline{1} \\ \underline{2} & \mapsto & \underline{1}[s][\uparrow] \\ & \vdots & \\ \underline{i+1} & \mapsto & \underline{i}[s][\uparrow] \\ & \vdots & \end{array}$$

Le rôle de *lift* consiste à mettre une substitution sous λ grâce à la règle typique

$$(\lambda a)[s] \to \lambda(a[\Uparrow(s)])$$

Interpréter β en $\lambda\upsilon$

La β-réduction correspond à une étape B suivie par une normalisation υ, c-à-d.

$$a \xrightarrow[\beta]{} b \;\equiv\; a \xrightarrow[B]{} c \,\&\, c \xrightarrow[\upsilon]{} \!\!\!\twoheadrightarrow\!| \; b$$

où $a \xrightarrow[\upsilon]{}\!\!\!\twoheadrightarrow\!| \; b$ signifie que b est la forme normale de a pour υ. On écrira aussi $b = \upsilon(a)$.

Le théorème principal

$\boxed{\lambda\upsilon \text{ préserve la } \beta \text{ forte normalisation.}}$

en d'autre termes

> Si un terme pur a est fortement β normalisable, alors a est fortement $\lambda\upsilon$ normalisable.

La preuve

Soi a_1 un terme fortement β normalisable.

- Considérons un contre-exemple minimal, c-à-d une dérivation de $\lambda \upsilon$ commençant à a_1.
- Il y a une clôture *C* qui contient une dérivation infinie,
- On permute les réductions, c-à-d. réductions externes en tête.
- On cherche l'application de la règle B qui a créé la clôture *C*.
- Il y a dérivation infinie encore plus petite. *Contradiction*!

Pourquoi la preuve marche?

Il n'y a que B qui crée des clôtures! Ce n'est pas le cas avec la règle Map

$$(a \cdot s) \circ t \longrightarrow a[t] \cdot (s \circ t).$$

Un ordre sur les derivations

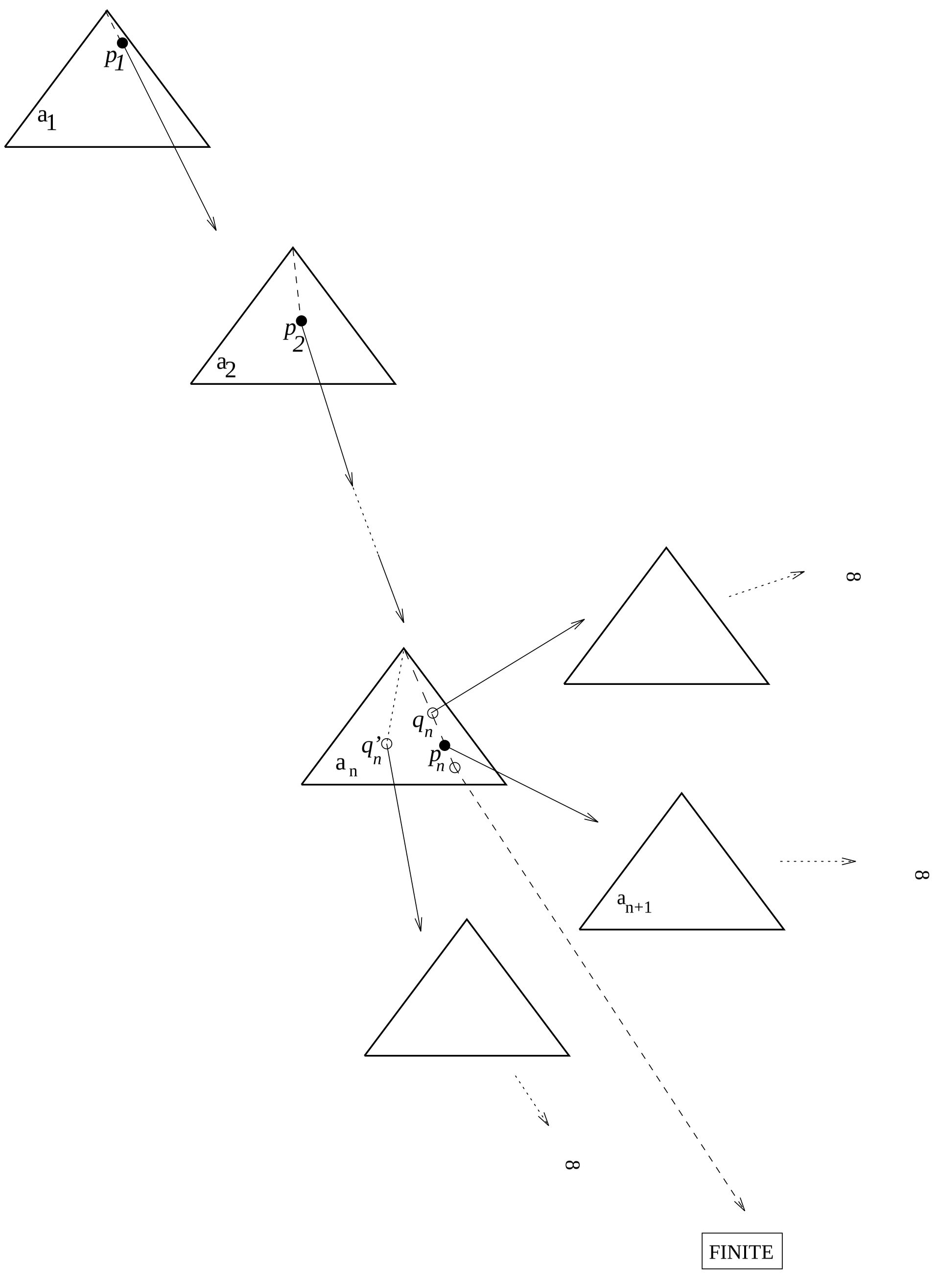
Définition 4 (Ordre sur les dérivations) *Soit a_1 un terme pur et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux dérivations $\lambda\upsilon$ commençant à a_1.*

$$\mathcal{D} = a_1 \xrightarrow[\lambda\upsilon, p_1]{} a_2 \xrightarrow[\lambda\upsilon, p_2]{} \cdots a_n \xrightarrow[\lambda\upsilon, p_n]{} a_{n+1} \cdots,$$

est dite plus petite *que*

$$\mathcal{D}' = a_1 \xrightarrow[\lambda\upsilon, q_1]{} a_2 \xrightarrow[\lambda\upsilon, q_2]{} \cdots a_n \xrightarrow[\lambda\upsilon, q_n]{} a'_{n+1} \cdots$$

si $p_i = q_i$ pour $i < n$ et q_n est un préfixe strict de p_n.


a_1
p_1
a_2
p_2
a_n
q'_n
q_n
p_n
a_{n+1}
∞
∞
∞
FINITE

Lemme 9 *Soit* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Terms}_\upsilon$ *tels que* $a_i \xrightarrow[\lambda\upsilon]{} a_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, *et* $a_n = t\{d[\Uparrow^i(e/)]\}_p$. *Alors,*

1. *Il existe un* i *tel que* $a_i = t'\{(\lambda d')e'\}_{p'}$ *et* $e' \xrightarrow[\lambda\upsilon]{*} e$,

2. *ou* $a_1 = t'\{d'[\Uparrow^j(e'/)]\}_{p'}$ *et* $e' \xrightarrow[\lambda\upsilon]{*} e$.

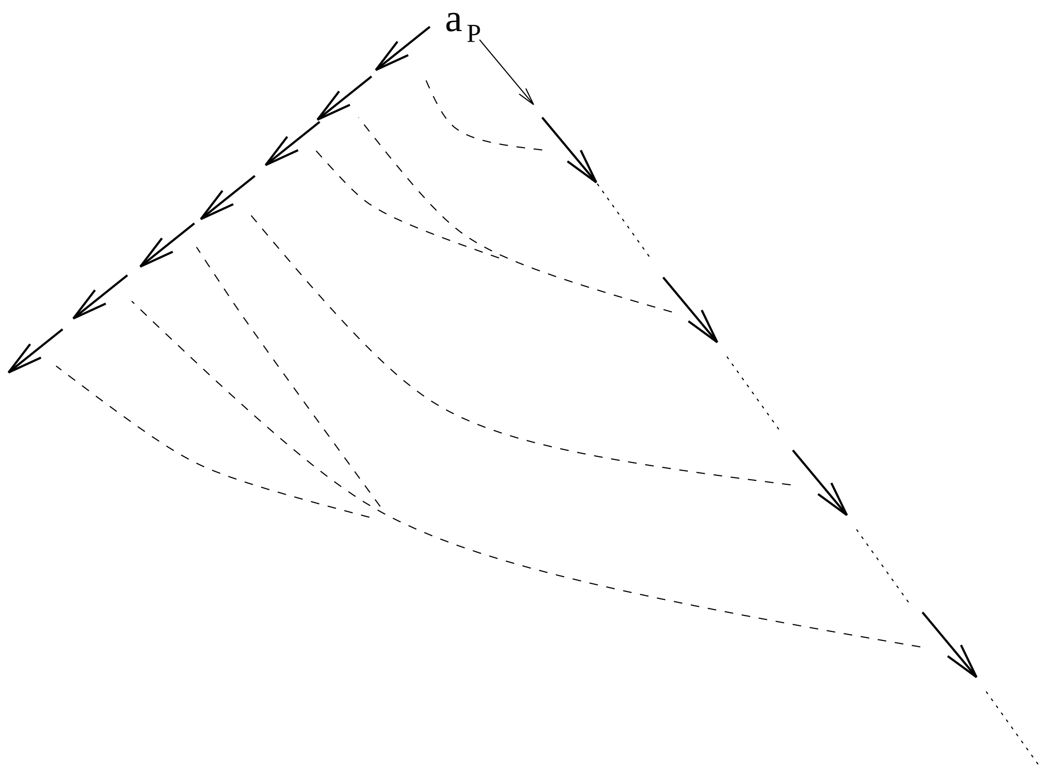
Lemme 10 *Si* $p \in Ext(a)$ *et si* $a \xrightarrow[B,p]{} b$*, alors* $\upsilon(a) \xrightarrow[\beta]{} \upsilon(b)$*. In particular, si* $\upsilon(a)$ *est fortement* β *normalisable* $\upsilon(a) \neq \upsilon(b)$*.*

Lemme 11 (Lemme de commutation) *Si* $\upsilon(a)$ *est fortement* β *normalisable,* $\upsilon(a) = \upsilon(b)$ *et*

$$a \xrightarrow[\lambda\upsilon,p]{}{}^{int} \cdot \xrightarrow[\upsilon,q]{}{}^{ext} b$$

alors

$$a \xrightarrow[\upsilon]{1,2}{}^{ext} \cdot \xrightarrow[\lambda\upsilon]{0,1,2}{}^{int} b.$$


a_P

Lemme 12 *Soit* a_1 *un terme pur fortement* β *normalisable. Dans chaque* $\lambda\upsilon$ *dérivation infinie commençant à* a_1 *il existe un* N *tel que pour* $i \geq N$ *toutes les réductions* $\lambda\upsilon$ *soient internes.*

Preuve du théorème

- Considérons la *frontière* de a_N. Si il y a dérivation “interne” infinie, il y a une infinité de réécriture dans la même clôture appartenant à la frontière.
- Cette clôture a été créée par une règle

$$a_J = t'\{(\lambda c')b\}_{p_J} \xrightarrow[B,p_J]{} t'\{c'[b/]\}_{p_J} = a_{J+1}$$

- Il est possible de faire «glisser» la dérivation infinie dans b, c-à-d sous p_J $\boxed{\text{ce qui contredit la minimalité.}}$

Un système de type pour $\lambda\sigma$

Terms

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash \underline{0} : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \underline{n} : A}{B, \Gamma \vdash \underline{n+1} : A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash ab : B} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash a : B}{\Gamma \vdash \lambda a : A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Delta \vdash [s] : \Gamma}{\Delta \vdash a[s] : A}$$

Substitutions

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash [s] : \Delta}{\Gamma \vdash [a \cdot s] : A, \Delta} \qquad \frac{}{A, \Gamma \vdash [\uparrow] : \Gamma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash [s] : \Delta \qquad \Delta \vdash [t] : \Theta}{\Gamma \vdash [s \circ t] : \Theta} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash [id] : \Gamma}$$

Un système de type pour $\lambda\upsilon$

Substitutions

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash [a] : A, \Gamma} \qquad \frac{}{A, \Gamma \vdash [\uparrow] : \Gamma} \qquad \frac{\Gamma \vdash [s] : \Delta}{A, \Gamma \vdash [\Uparrow(s)] : A, \Delta}$$

Un système de type pour $\mathcal{F}\upsilon$

$$\frac{}{A\,,\Gamma \;\vdash\; \underline{0} : A}\ (\mathsf{VAR}_0) \qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; \underline{n} : A}{B\,,\Gamma \;\vdash\; \underline{n+1} : A}\ (\mathsf{VAR}_+)$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; a : B \Rightarrow A \qquad \Gamma \;\vdash\; b : B}{\Gamma \;\vdash\; a\ b : A}\ (\mathsf{APP}) \qquad \frac{A\,,\Gamma \;\vdash\; a : B}{\Gamma \;\vdash\; \lambda a : A \Rightarrow B}\ (\mathsf{ABS})$$

$$\frac{\Delta\,,B\,,\Gamma \;\vdash\; a : A \qquad \Gamma \;\vdash\; b : B}{\Delta\,,\Gamma \;\vdash\; a[\Uparrow^n(b)] : A}\ (\mathsf{CLOS}) \qquad \frac{\Delta\,,\Gamma \;\vdash\; a : A}{\Delta\,,B\,,\Gamma \;\vdash\; a[\Uparrow^n(\uparrow)] : A}\ (\mathsf{SHIFT})$$

$$\frac{\Gamma \;\vdash\; a : \forall X\ A}{\Gamma \;\vdash\; a : A\langle X := B\rangle}\ (\mathsf{SPE}) \qquad \frac{\Gamma \;\vdash\; a : A}{\Gamma \;\vdash\; a : \forall X\ A}\ \ X \text{ not free in } \Gamma\ \ (\mathsf{GEN})$$