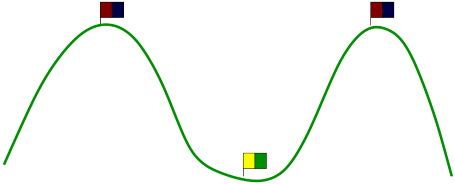
La logique de la connaissance

Pierre Lescanne, LIP, ENS de Lyon

10 novembre 2006

L'attaque coordonnée

- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,



L'attaque coordonnée

- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,
- Ils doivent attaquer ensemble et chaque général doit être sûr que l'autre général attaquera en même temps.

L'attaque coordonnée

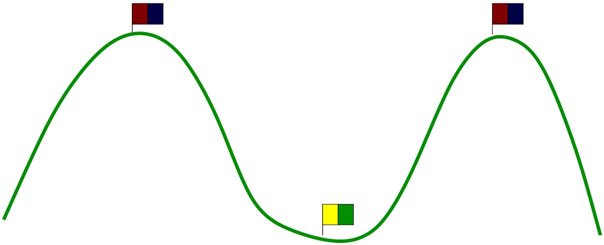
- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,
- Ils doivent attaquer ensemble et chaque général doit être sûr que l'autre général attaquera en même temps.
- Ils communiquent par des messagers
  - qui mettent une heure pour aller d'un camp à l'autre,
  - qui peuvent se perdre dans le noir ou être capturés.

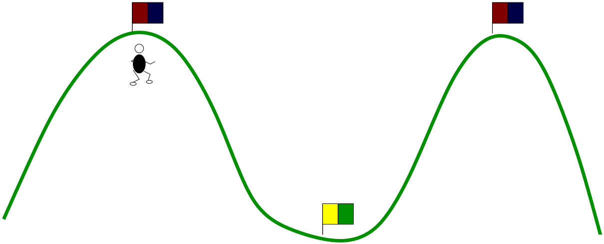
L'attaque coordonnée

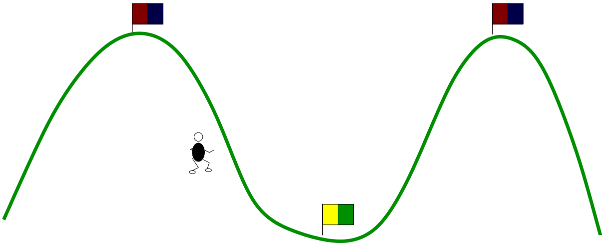
- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,
- Ils doivent attaquer ensemble et chaque général doit être sûr que l'autre général attaquera en même temps.
- Ils communiquent par des messagers
  - qui mettent une heure pour aller d'un camp à l'autre,
  - qui peuvent se perdre dans le noir ou être capturés.

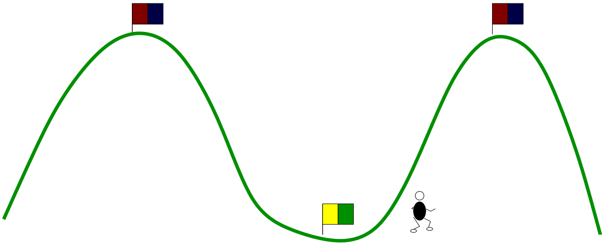
Comment coordonner une attaque ?

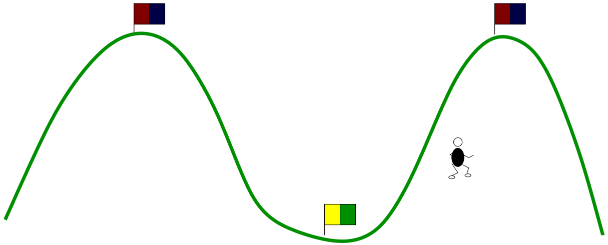
Le général 1 envoie des messagers au général 2

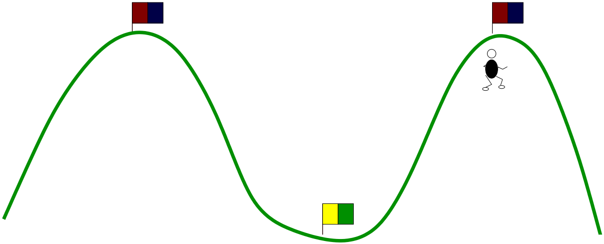




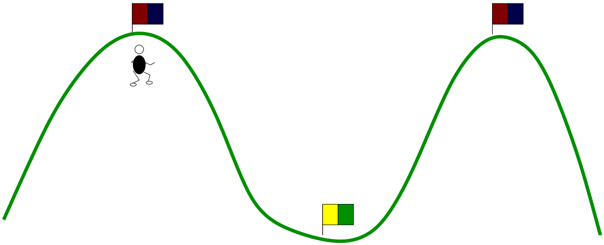


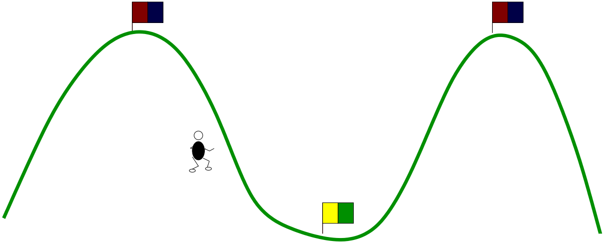


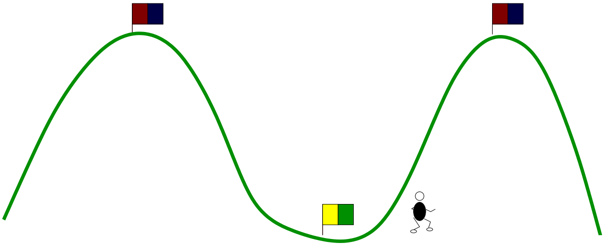


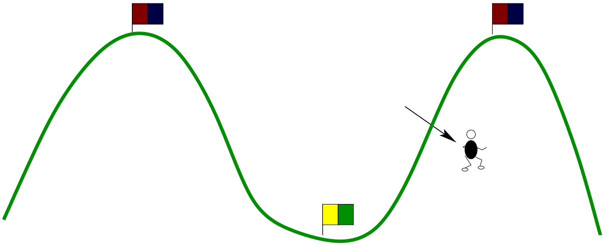


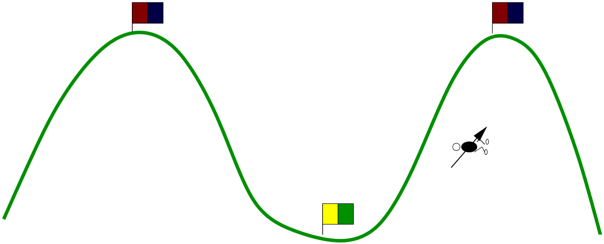
Mais le messager peut être capturé ou être tué !



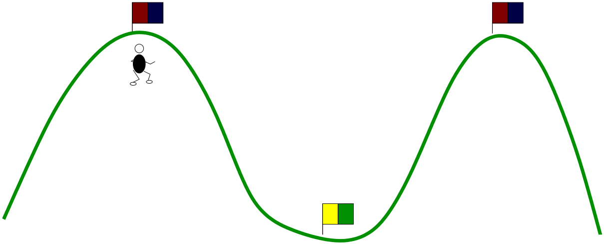


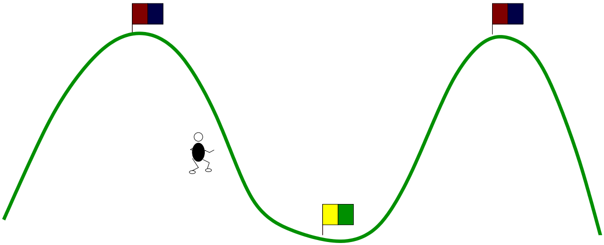


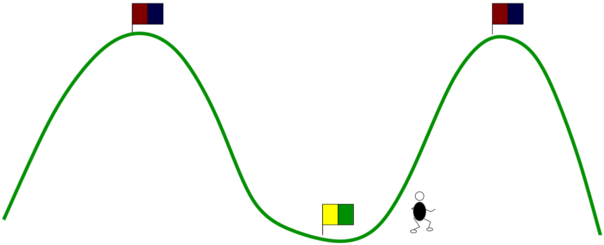


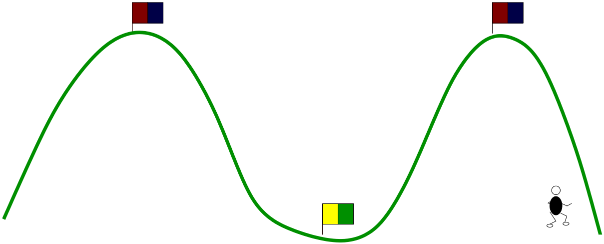


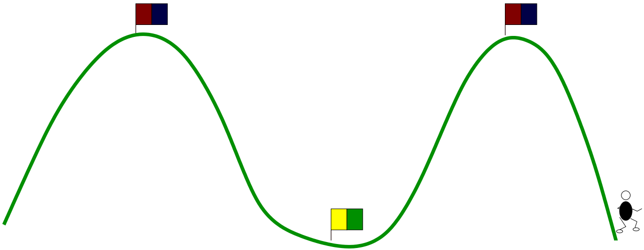
Mais le messager peut se perdre !











L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

À l'arrivée du messager, le général 2 accepte l'heure H
et envoie une messager avec son accord.

L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

À l'arrivée du messager, le général 2 accepte l'heure H
et envoie une messager avec son accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il sait que le général 2 connaît l'heure qu'il a proposée et l'accepte.

L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

À l'arrivée du messager, le général 2 accepte l'heure H
et envoie une messager avec son accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il sait que le général 2 connaît l'heure qu'il a proposée et l'accepte.

Le général 2 attaquera à l'heure H si il (général 2) sait que le général 1 sait qu'il (général 2) connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 1 doit envoyer un second messager avec un accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il (général 1) sait que le général 2 sait qu'il (général 1) sait que le général 2 connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 2 doit envoyer un second messager avec un accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il (général 1) sait que le général 2 sait qu'il (général 1) sait que le général 2 connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 2 doit envoyer un second messager avec un accord.

Le général 2 attaquera à l'heure H si il (général 2) sait que le général 1 sait qu'il (général 2) sait que le général 1 sait qu'il (général 2) connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 1 doit envoyer un troisième messager avec un accord.

$$\vdots$$

L'attaque coordonnée

Le processus ne va jamais s'arrêter.

L'attaque coordonnée

Le processus ne va jamais s'arrêter.

On peut démontrer qu'avec des communications asynchrones, une attaque coordonnée n'est pas possible.

L'attaque coordonnée

Le processus ne va jamais s'arrêter.

On peut démontrer qu'avec des communications asynchrones, une attaque coordonnée n'est pas possible. L'acquisition d'une

connaissance commune n'est pas possible de façon asynchrone.


THE PENT

L'ex-secrétaire américain à la Défense Donald Rumsfeld, lors d'un point de presse en février 2002 :

> *«Les informations annonçant que quelque chose n'a pas eu lieu m'intéressent toujours pour la bonne raison que, comme vous le savez, ce sont des nouvelles connues ; il y a des choses que nous savons que nous savons»*
>
> *«Nous savons aussi qu'il y a des choses inconnues ; ce qui revient à dire que nous savons qu'il y a certaines choses dont nous ne savons rien. Mais il existe aussi des nouvelles inexistantes que nous ne connaissons pas – ce sont celles dont nous ignorons si nous les connaissons.»*

Les as et les huit

Il y a huit cartes : quatre as et quatre 8.

Les as et les huit

Il y a huit cartes : quatre as et quatre 8.

Chaque joueur reçoit deux cartes qu'il ne regarde pas,
mais qu'il montre à tout le monde.

Les as et les huit

Il y a huit cartes : quatre as et quatre 8.

Chaque joueur reçoit deux cartes qu'il ne regarde pas,
mais qu'il montre à tout le monde.

Chaque joueur parle à son tour :

- Soit il dit Je ne sais pas,
- Soit il dit
  - J'ai une paire,
  - J'ai un as et un huit.

Les as et les huit

On fait autant de tours qu'il faut.
Il y a toujours un joueur qui peut deviner les cartes qu'il a.

Les as et les huit

On fait autant de tours qu'il faut.
Il y a toujours un joueur qui peut deviner les cartes qu'il a.

Comment cela se peut-il ?

Les as et les huit

1re donne 1 : $A + A$ 2 : $8 + 8$ 3 : $8 + 8$

Les as et les huit

1^{re} donne	$1: A+A$	$2: 8+8$	$3: 8+8$
2^{e} donne	$1: A+A$	$2: 8+8$	$3: A+A$

Les as et les huit

1^{re} donne	$\textcolor{red}{1}$: $A + A$	2 : $8 + 8$	3 : $8 + 8$
2^{e} donne	1 : $A + A$	$\textcolor{red}{2}$: $8 + 8$	3 : $A + A$
3^{e} donne	1 : $A + A$	2 : $8 + 8$	$\textcolor{red}{3}$: $A + 8$

Les as et les huit

1^{re} donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : 8 + 8$
2^{e} donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + A$
3^{e} donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + 8$
4^{e} donne	$1^2 : A + 8$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + 8$

Les as et les huit

1re donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2e donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3e donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4e donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5e donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$

Les as et les huit

1^{re} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4^{e} donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5^{e} donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6^{e} donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$

Les as et les huit

1^{re} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4^{e} donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5^{e} donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6^{e} donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$
7^{e} donne	1 : $8+8$	2 : $8+8$	3 : $A+A$

Les as et les huit

1re donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : 8 + 8$
2e donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + A$
3e donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + 8$
4e donne	$1^2 : A + 8$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + 8$
5e donne	$1 : A + 8$	$2^2 : A + 8$	$3 : A + 8$
6e donne	$1 : A + 8$	$2 : A + 8$	$3^2 : A + A$
7e donne	$1 : 8 + 8$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + A$
8e donne	$1 : 8 + 8$	$2^2 : A + 8$	$3 : A + A$

Les as et les huit

1^{re} donne	$1 : A+A$	$2 : 8+8$	$3 : 8+8$
2^{e} donne	$1 : A+A$	$2 : 8+8$	$3 : A+A$
3^{e} donne	$1 : A+A$	$2 : 8+8$	$3 : A+8$
4^{e} donne	$1^2 : A+8$	$2 : 8+8$	$3 : A+8$
5^{e} donne	$1 : A+8$	$2^2 : A+8$	$3 : A+8$
6^{e} donne	$1 : A+8$	$2 : A+8$	$3^2 : A+A$
7^{e} donne	$1 : 8+8$	$2 : 8+8$	$3 : A+A$
8^{e} donne	$1 : 8+8$	$2^2 : A+8$	$3 : A+A$
9^{e} donne	$1 : 8+8$	$2 : A+8$	$3^2 : A+8$

Les as et les huit

1^{re} donne	1	$: A+A$	2	$: 8+8$	3	$: 8+8$
2^{e} donne	1	$: A+A$	2	$: 8+8$	3	$: A+A$
3^{e} donne	1	$: A+A$	2	$: 8+8$	3	$: A+8$
4^{e} donne	1^2	$: A+8$	2	$: 8+8$	3	$: A+8$
5^{e} donne	1	$: A+8$	2^2	$: A+8$	3	$: A+8$
6^{e} donne	1	$: A+8$	2	$: A+8$	3^2	$: A+A$
7^{e} donne	1	$: 8+8$	2	$: 8+8$	3	$: A+A$
8^{e} donne	1	$: 8+8$	2^2	$: A+8$	3	$: A+A$
9^{e} donne	1	$: 8+8$	2	$: A+8$	3^2	$: A+8$
10^{e} donne	1^2	$: A+8$	2	$: 8+8$	3	$: A+A$

Les modalités

Une modalité est un opérateur
qui transforme une proposition en une autre proposition.

On crée un modalité K_A pour chaque agent A.

Une logique avec des modalités s'appelle une logique modale.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 - 1716)

Qu'est-ce que la logique de la connaissance ?

- La logique épistémique est la logique qui formalise
  «L'agent i sait que φ», noté $K_i(\varphi)$,
- Tandis que la logique de la connaissance est la logique qui formalise
  «φ est une connaissance commune», noté $C_G(\varphi)$.

La connaissance commune

$C_G(\varphi)$ formalise des phrases comme

- «φ est un fait bien connu sauf des irrationnels.»
- «L'agent i sait que l'agent j sait que l'agent i sait que , etc.».

La connaissance commune

$C_G(\varphi)$ formalise des phrases comme

- «φ est un fait bien connu sauf des irrationnels.»
- «L'agent i sait que l'agent j sait que l'agent i sait que , etc.».

On a besoin d'une modalité E, dite de «connaissance partagée», «Tout le monde sait que φ»,

$$E_G(\varphi) = \bigwedge_{i \in G} K_i(\varphi).$$

La connaissance commune

$C_G(\varphi)$ formalise des phrases comme

- «φ est un fait bien connu sauf des irrationnels.»
- «L'agent i sait que l'agent j sait que l'agent i sait que , etc.».

On a besoin d'une modalité E, dite de «connaissance partagée», «Tout le monde sait que φ»,

$$E_G(\varphi) = \bigwedge_{i \in G} K_i(\varphi).$$

La connaissance commune n'est pas la connaissance partagée.

Les règles

C'est une logique qui se présente avec un symbole $\vdash$

$\vdash \varphi$ signifie «φ est un théorème» :

Le modus ponens

$$\frac{\vdash \phi \qquad \vdash \phi \Rightarrow \psi}{\vdash \psi}\ (MP)$$

La règle de généralisation de la connaissance

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash K_i\phi}\ (GK)$$

Les axiomes

Il y a tous les théorèmes de la logique propositionnelle classique.

$$\frac{}{\vdash \phi}\,(C\ell) \qquad \text{si } \phi \text{ est un théorème de la logique classique.}$$

Les axiomes

Il y a tous les théorèmes de la logique propositionnelle classique.

$$\frac{}{\vdash \phi}\,(C\ell) \qquad \text{si } \phi \text{ est un théorème de la logique classique.}$$

Par exemple

$$\psi \equiv (K_i\neg\phi \Rightarrow \neg\phi) \Rightarrow (\neg K_i\phi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\phi) \Rightarrow \phi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\phi$$

qui est une instance de $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Les axiomes

Il y a quatre axiomes.

axiome de distribution

$$\frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow K_i(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\ \textbf{(K)}$$

axiome de la connaissance

$$\frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow \phi}\ \textbf{(T)}$$

une preuve

Les axiomes

axiome d'introspection positive

$$\frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow K_iK_i\phi}\ \textbf{(4)}$$

discussion

axiome d'introspection négative

$$\frac{}{\vdash \neg K_i\phi \Rightarrow K_i\neg K_i\phi}\ \textbf{(5)}$$

une autre preuve

formule de Barcan

Attention

En logique modale on n'a pas la règle de déduction

«Si à partir de ϕ et des hypothèses de Γ on prouve ψ»
on ne peut pas en déduire que
«Γ induit $\phi \Rightarrow \psi$»

Pourquoi ?

Axiome de la connaissance partagée

Définition de E_G

$$\frac{}{\vdash E_G(\phi) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} K_i(\phi)}\,(E)$$

Point fixe

Si l'on a une fonction $f : E \rightarrow E$.

Une valeur a telle que $a = f(a)$ est un point fixe de f.

Le point fixe satisfait donc
$a = f(a) = f(f(a)) = f(f(f(a))) = \ldots = f(...f(a)...) = \ldots.$

Axiome et règle de la connaissance commune

Prenons pour f : *Propositions* $\to$ *Propositions*, la fonction

$$\alpha \mapsto \phi \wedge E_G(\alpha).$$

On voit que $f(\alpha) \Rightarrow \alpha$ c'est-à-dire $\phi \wedge E_G(\alpha) \Rightarrow \alpha$ α est un point fixe de f si il satisfait l'inégalité $\alpha \Rightarrow \phi \wedge E_G(\alpha)$.

Axiome et règle de la connaissance commune

Prenons pour f : *Propositions* $\to$ *Propositions*, la fonction

$$\alpha \mapsto \phi \wedge E_G(\alpha).$$

On voit que $f(\alpha) \Rightarrow \alpha$ c'est-à-dire $\phi \wedge E_G(\alpha) \Rightarrow \alpha$ α est un point fixe de f si il satisfait l'inégalité $\alpha \Rightarrow \phi \wedge E_G(\alpha)$.

D'où l'axiome :

$$\frac{}{\vdash C_G\phi \Rightarrow \phi \wedge E_G(C_G\phi)}\ (C)$$

Axiome et règle de la connaissance commune

Prenons pour f : *Propositions* $\rightarrow$ *Propositions*, la fonction

$$\alpha \mapsto \phi \wedge E_G(\alpha).$$

On voit que $f(\alpha) \Rightarrow \alpha$ c'est-à-dire $\phi \wedge E_G(\alpha) \Rightarrow \alpha$ α est un point fixe de f si il satisfait l'inégalité $\alpha \Rightarrow \phi \wedge E_G(\alpha)$.

D'où l'axiome :

$$\frac{}{\vdash C_G\phi \Rightarrow \phi \wedge E_G(C_G\phi)}\ (C)$$

$C_G\phi$ est de plus le plus petit point fixe,

c'est-à-dire si un α satisfait $\alpha \Rightarrow \phi \wedge E_G(\alpha)$ alors $\alpha \Rightarrow C_G\phi$.

$$\frac{\vdash \alpha \Rightarrow \phi \wedge E_G(\alpha)}{\vdash \alpha \Rightarrow C_G\phi}\ (RC)$$

Pour résumer

$$\frac{\phi \text{ est une tautologie classique}}{\vdash \phi}\;(C\ell)$$

$$\frac{\vdash \phi \qquad \vdash \phi \Rightarrow \psi}{\vdash \psi}\;(MP) \qquad \frac{\vdash \phi}{\vdash K_i\phi}\;(GK)$$

$$\frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow K_i(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\;(\mathbf{K}) \qquad \frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow \phi}\;(\mathbf{T})$$

$$\frac{}{\vdash E_G(\phi) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} K_i(\phi)}\;(E)$$

$$\frac{}{\vdash C_G\phi \Rightarrow \phi \wedge E_G(C_G\phi)}\;(C) \qquad \frac{\vdash \psi \Rightarrow \phi \wedge E_G(\psi)}{\vdash \psi \Rightarrow C_G\phi}\;(RC)$$

Pour résumer

$$\frac{\phi \text{ est une tautologie classique}}{\vdash \phi}\ (C\ell)$$

$$\frac{\vdash \phi \qquad \vdash \phi \Rightarrow \psi}{\vdash \psi}\ (MP) \qquad \frac{\vdash \phi}{\vdash K_i\phi}\ (GK)$$

$$\frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow K_i(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\ (\mathbf{K}) \qquad \frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow \phi}\ (\mathbf{T})$$

$$\frac{}{\vdash E_G(\phi) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} K_i(\phi)}\ (E)$$

$$\frac{}{\vdash C_G\phi \Rightarrow \phi \wedge E_G(C_G\phi)}\ (C) \qquad \frac{\vdash \psi \Rightarrow \phi \wedge E_G(\psi)}{\vdash \psi \Rightarrow C_G\phi}\ (RC)$$

$$\frac{}{\vdash K_i\phi \Rightarrow K_iK_i\phi}\ (\mathbf{4}) \qquad \frac{}{\vdash \neg K_i\phi \Rightarrow K_i\neg K_i\phi}\ (\mathbf{5})$$

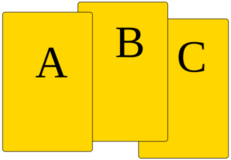
Les modèles de Kripke

Un modèle de Kripke est fait

- de mondes,
- d'une relation d'accessibilité entre mondes,
- d'une initialisation $\mathcal{I}$ des variables.

Un jeu très simple

2 agents, 3 cartes $\{A, B, C\}$.



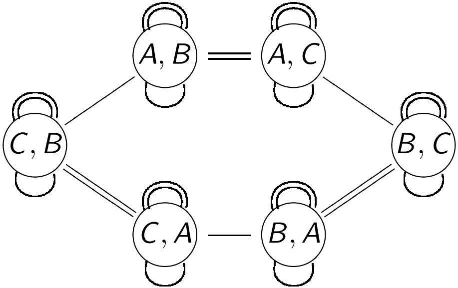
L'agent 1 reçoit une carte
L'agent 2 reçoit un carte
La troisième carte est retournée face contre la table
Il y a six mondes possibles :

$$(A, B), (A, C), (B, A)(B, C), (C, A), (C, B).$$

Les modèles de Kripke

La relation d'accessibilité de l'agent 1 est notée par $=$

Dans le monde (A, B) l'agent 1 envisage deux mondes possibles à savoir (A, B) et (A, C).



Le modèle de Kripke $\mathcal{M}$

Les modèles de Kripke

Les propositions primitives sont

- $1A$ le joueur (l'agent) 1 détient la carte A,
- $2A$ le joueur (l'agent) 2 détient la carte A,
- $1B$ le joueur (l'agent) 1 détient la carte B,
- $2B$ le joueur (l'agent) 2 détient la carte B,
- $1C$ le joueur (l'agent) 1 détient la carte C,
- $2C$ le joueur (l'agent) 2 détient la carte C.

Des assertions de forçage

forçage

$(A, B) \Vdash 1A \wedge 2B$,
$(A, B) \Vdash K_1(2B \vee 2C)$,
$(A, B) \Vdash K_1 \neg K_2(1A)$.

Pour tout monde u l'assertion $u \Vdash K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$ est vraie
donc $\mathcal{M}$ modélise $K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$
ce qui s'écrit $\mathcal{M} \vDash K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$.

Des assertions de forçage

forçage

$(A, B) \Vdash 1A \wedge 2B$,
$(A, B) \Vdash K_1(2B \vee 2C)$,
$(A, B) \Vdash K_1 \neg K_2(1A)$.

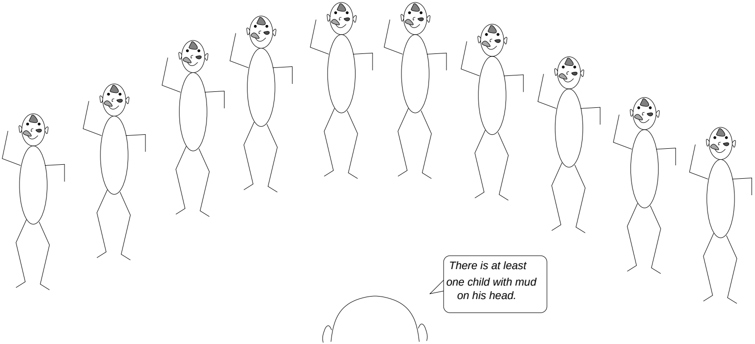
Pour tout monde u l'assertion $u \Vdash K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$ est vraie
donc $\mathcal{M}$ modélise $K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$
ce qui s'écrit $\mathcal{M} \vDash K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$.

Si tout modèle modélise φ, on dit que «φ est valide»,
ce qui s'écrit $\vDash \varphi$.

Les enfants sales

- Il y a *n* enfants dont certains ont de la saleté sur le front.
- Le père déclare «L'un d'entre vous a de la saleté sur le front».

Les enfants sales

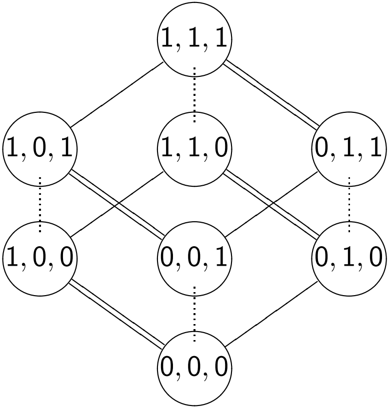


Les enfants sales

- Il y a n enfants dont certains ont de la saleté sur le front.
- Le père déclare «L'un d'entre vous a de la saleté sur le front».

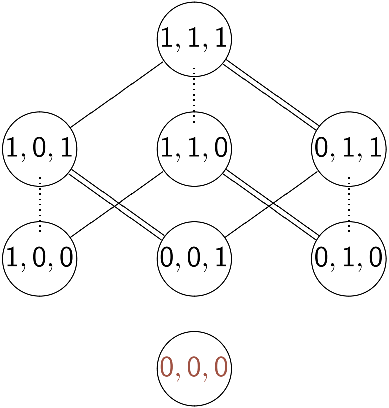
- Puis le père pose plusieurs fois (combien ?) la question «Avez-vous de la saleté sur le front ?».
- Comme les n enfants ont tous de la saleté sur le front.
- Après n questions du père, ils répondent tous ensemble «oui».

Le modèle de Kripke pour trois enfants sales

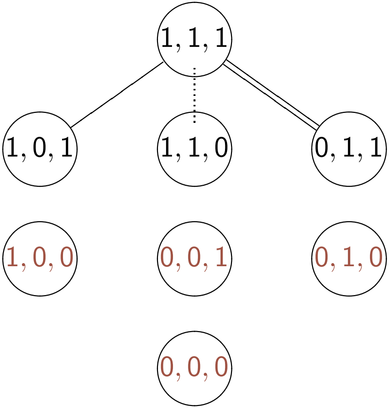


On abandonne les boucles de réflexivité.

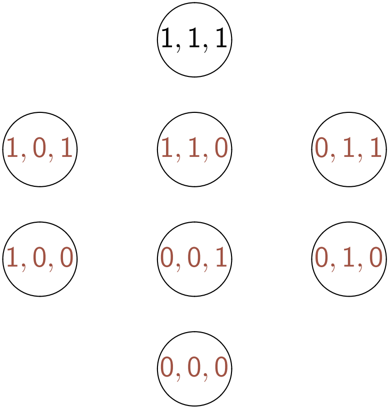
Après que le père a parlé



Après que le père a posé sa première question



Après que le père a posé sa deuxième question



Correction

Théorème Correction : Si $\vdash \phi$ alors $\models \phi$.

Théorème Complétude : Si $\models \phi$ alors $\vdash \phi$.

Des exemples

- L'attaque coordonnée
- Une déclaration
- Un jeu de cartes avec annonces

La logique de la connaissance

- Les modalités
- Les règles et les axiomes
- Les modèles
- L'énigme des enfants sales
- Correction et preuves

La logique épistémique pour quoi faire ?

La logique épistémique pour quoi faire ?

De grands domaines d'application

- la théorie des jeux :
  - économie,
  - Internet,
  - les décisions stratégiques,
- l'interrogation de bases de connaissance,
- les protocoles de sécurité,
- l'étude du concept de rationalité en philosophie.

Pourquoi pas la règle de déduction ?

Si on avait la règle de déduction

«De $\Gamma, \phi \vdash \psi$ je déduis $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi$»

alors du jugement $\phi \vdash K_i\phi$ on aurait $\phi \vDash K_i\phi$,

c'est-à-dire

«Si dans tous les mondes de l'univers en question, ϕ est vrai, alors chaque agent i sait ϕ»

on pourrait déduire $\vDash \phi \Rightarrow K_i\phi$

c'est-à-dire «Si ϕ est vrai alors chaque agent i sait ϕ».

Une preuve

$$\vdash K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi$$

Une preuve

$$\vdash K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\,(K) \qquad \dfrac{}{\vdash (K_i\varphi \Rightarrow K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi) \Rightarrow (K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi}}{\vdash K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi}$$

retour

Une autre preuve

On peut prouver $\vdash \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi$.

Une autre preuve

On peut prouver $\vdash \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi$.

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{\vdash \neg K_i \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi}\,\mathbf{(5)}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{\vdash \psi}\,(C\ell)
    \qquad
    \dfrac{}{\vdash K_i \neg \phi \Rightarrow \neg \phi}\,(\mathbf{T})
  }{\vdash (\neg K_i \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi) \Rightarrow \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi}\,(MP)
}{\vdash \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi}\,(MP)
$$

où $\psi \equiv (K_i \neg \phi \Rightarrow \neg \phi) \Rightarrow (\neg K_i \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi) \Rightarrow \phi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \phi$

qui est un théorème classique.

Car c'est une instance de $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

retour

Accessibilité et forçage

1. Si φ est une variable p :

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une disjonction $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{or} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

4. Si φ est une implication $\psi \Rightarrow \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{implique} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

5. Si $\bot$ est absurde, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \bot$.

Accessibilité et forçage

6. Si φ est une modalité $K_i(\psi)$ alors

$$u \Vdash K_i(\psi) \qquad \text{ssi} \qquad (\forall v \in \mathcal{U})\ u\ R_i\ v \quad \text{implies} \quad v \Vdash \psi.$$

Cela signifie aussi que
l'agent i sait ψ dans le monde u
si et seulement si
dans chaque monde qu'il tient comme possible ψ est satisfaite.

Accessibilité et forçage

7. Si φ est une modalité $C_G(\psi)$ alors

$$u \Vdash C_G(\psi) \qquad \text{ssi} \qquad (\forall v \in \mathcal{U})\ u\ (\bigcup_{i \in G} R_i)^*\ v \quad \text{implies} \quad v \Vdash \psi.$$

Cela signifie aussi que

$C_G(\psi)$ est satisfaite dans le monde u
si et seulement si
dans chaque monde accessible
par un chemin d'accessibilité, ψ est satisfaite.

Accessibilité et forçage

On doit avoir

$$u \Vdash K_i\varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall v \in \mathcal{U})\ v\ R_i\ u \Rightarrow v \Vdash \varphi.$$

Autrement dit, $u \Vdash K_i\varphi$ si et seulement si, dans tous les mondes accessibles par R_i à partir de u, on a φ.
Ou encore, l'agent i sait φ si dans tous les mondes qu'il peut envisager, φ est satisfaite.

Retour

Formule de Barcan

axiome de Barcan

$$\vdash (\forall a \in A)\ K_i(P(a)) \quad \Rightarrow \quad K_i((\forall a \in A)\ P(a))$$

retour

Introspection positive et connaissance commune

L'instrospection positive est une propriété de la connaissance commune.
En effet on a :

$$C_G \varphi \Rightarrow C_G C_G \varphi$$

même si on n'a pas

$$K_i \varphi \Rightarrow K_i K_i \varphi.$$

retour