Les problèmes de correspondance

version du September 11, 2001 – 16 h 08

Emil Post

Né à Augustow en Pologne en 1897

Mort à New-York aux Etats-Unis en 1954

Fondateur en 1936 de la théorie de la décidabilité indépendamment d'Alan Turing.

Auteur aussi en 1947 d'un célèbre résultat sur les mots:

le problème de correspondance.

Problème de correspondance de Post

Un ensemble $(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_n, \beta_n)$

où $\alpha_i \in A^*$ et $\beta_i \in A^*$

est appelé un problème de correspondance de Post.

Une holorime est formée

- d'un mot $w \in A^+$
- et d'une suite $(i_1, ..., i_p) \in [1..n]^+$

tels que

$$w = \alpha_{i_1} ... \alpha_{i_p} = \beta_{i_1} ... \beta_{i_p}.$$

Vers holorimes

Deux vers holorimes sont deux vers qui riment entièrement, le second reproduisant phonétiquement le premier.

Ainsi la réflexion d'un musicien à son ami à propos de l'art:

> L'art efface. Olé l'ami!
> La Ré Fa Sol et La Mi.

Vers holorimes

Replaçons nous au niveau strictement phonétique; les vers ci-dessus peuvent être issus du problème de correspondance suivant:

1. (ar, ré)
2. (ami, mi)
3. (é, fa)
4. (fas,sol)
5. (l, la)
6. (olé, é)

Vers holorimes

1. (ala, tour)
2. (aman, dela)
3. (dela, rène)
4. (gal, galaman)
5. (magnanime, anime)
6. (rène, ala)
7. (tour, magn)

Une holorime est galamandelarènealatourmagnanime avec la suite $(4,2,3,6,1,7,5)$.

> Gal, amant de la reine, alla, tour magnanime,
> Gallament de l'arène, à la tour Magne, à Nîmes.
>
> Victor Hugo

Mais là c'est super-facile.

Abandonnons la poésie pour les suites de 0 et de 1.

Des exemples

Les problèmes de correspondance ci-dessus :

i	α_i	β_i
1	010	101
2	00	000
3	101	01

1

i	α_i	β_i
1	101	10
2	11	011
3	011	101

2

ont-ils une holorime ?

Des exemples (encore)

Et ceux là?

i	α_i	β_i
1	011	1
2	1	0
3	0	011
4	10	001

3

i	α_i	β_i
1	000	0
2	0	111
3	11	0
4	10	100

4

ont-ils une holorime ?

Le problème 3 a pour solution

$$\overbrace{0}^{3}\ \overbrace{1}^{2}\ \overbrace{1\ 0}^{4}\ \overbrace{0}^{3}\ \overbrace{0}^{3}\ \overbrace{1}^{2}\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}\ \overbrace{1\ 0}^{4}\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}$$

et

$$\underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \underbrace{0}_{2}\ \underbrace{0\ 0\ 1}_{4}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \underbrace{0}_{2}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0\ 0\ 1}_{4}\ \underbrace{1}_{1}$$

Le problème 3 a pour solution

$$\overbrace{0}^{3}\ \overbrace{1}^{2}\ \overbrace{1\ 0}^{4}\ \overbrace{0}^{3}\ \Big|\ \overbrace{0}^{3}\ \overbrace{1}^{2}\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}\ \Big|\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}\ \overbrace{0\ 1\ \big|\ 1}^{1}\ \overbrace{1\ 0}^{4}\ \overbrace{0\ 1\ 1}^{1}$$

et

$$\underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \underbrace{0}_{2}\ \underbrace{0\ \big|\ 0\ 1}_{4}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \Big|\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\ \underbrace{0}_{2}\ \underbrace{1}_{1}\ \Big|\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0\ 0\ 1}_{4}\ \underbrace{1}_{1}$$

Le problème 4 possède une solution de taille 204.

A vous de la trouver!

L'indécidabilité

Le problème de correspondance de Post (ou PCP) est indécidable, à partir de deux éléments dans A.

Autrement dit, il n'y a pas d'algorithme avec

- entrée : un PCP sur deux lettres
- sortie : le problème a une holorime ou le problème n'a pas d'holorime.

A quoi sert PCP?

Dans de multiples problèmes d'indécidabilité

- Dans le grammaires,
- Dans les systèmes de simplification ou systèmes de réécriture, indécidabilité de terminaison des systèmes à une règle.

PCP at HOME

A l'adresse

`http://www.informatik.uni-leipzig.de/~pcp/pcpcontest_en.html`

Vous trouverez

- Des jeux[a] de Post pour vous faire travailler vous méninges!
- Quelques problèmes de Post pour vous casser les dents et vous défier. Il y a une quantité de problèmes ouverts!
- Les records établis[b].

[a] Le problème 3

[b] Le problème 4