Il *croit* qu’il est Napoléon,
mais *tout le monde sait*
que c’est moi.

La logique épistémique

Pierre Lescanne

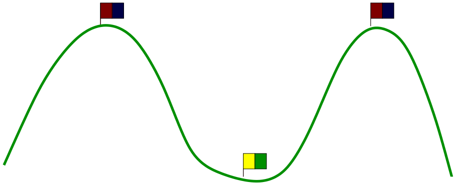
18 novembre 2004 – 17 h 23

Plan

Plan

L'attaque coordonnée

- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,



L'attaque coordonnée

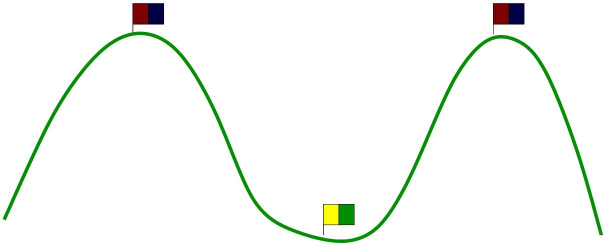
- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,
- Ils doivent attaquer **ensemble** et chaque général doit être sûr que l'autre général attaquera en même temps.
- Ils communiquent par des messagers
  - qui mettent une heure pour aller d'un camp à l'autre,
  - qui peuvent se perdre dans le noir ou être capturés.

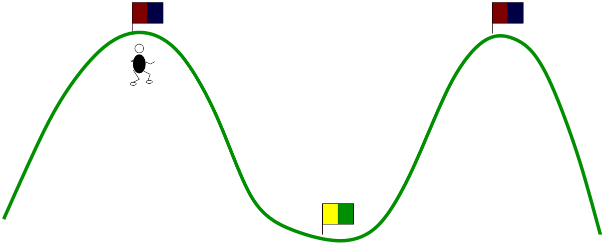
L'attaque coordonnée

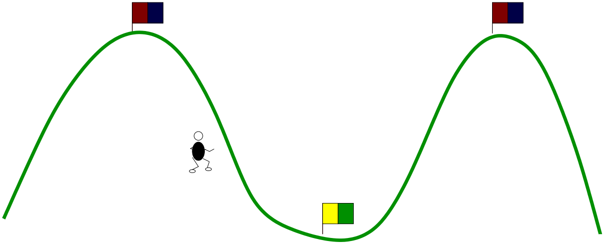
- Deux généraux et leurs armées sur deux collines,
- Ils doivent attaquer **ensemble** et chaque général doit être sûr que l'autre général attaquera en même temps.
- Ils communiquent par des messagers
  - qui mettent une heure pour aller d'un camp à l'autre,
  - qui peuvent se perdre dans le noir ou être capturés.

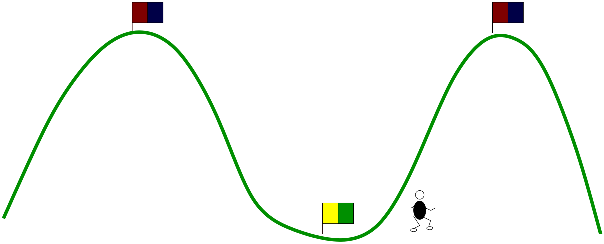
Comment coordonner une attaque ?

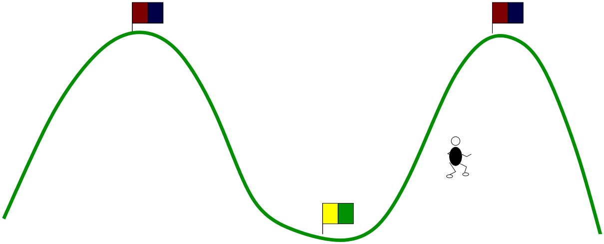
Le général 1 envoie des messagers au général 2

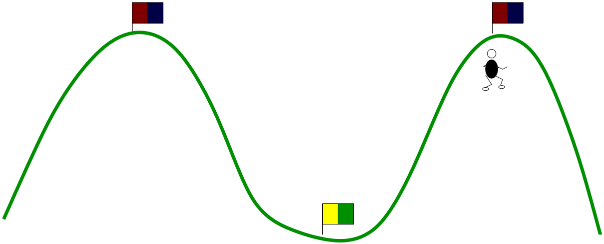




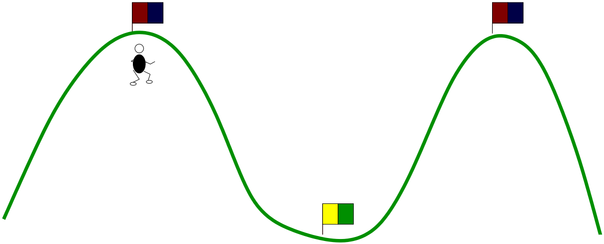


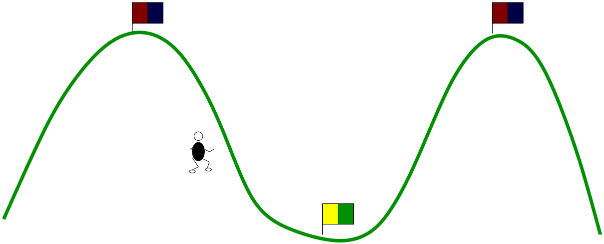


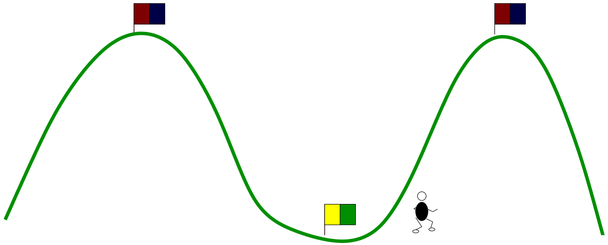


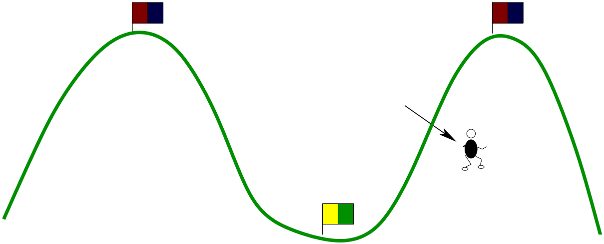


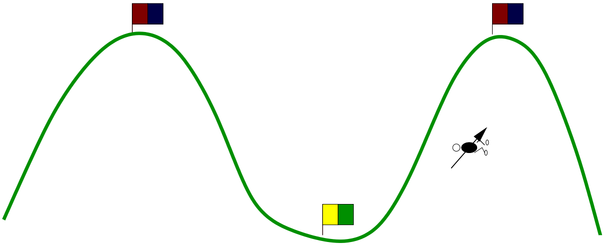
Mais le messager peut être capturé ou être tué !



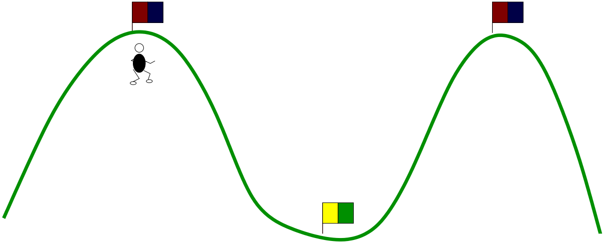


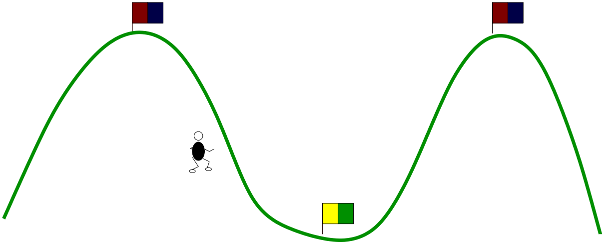


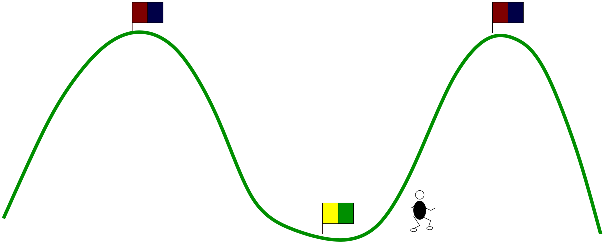


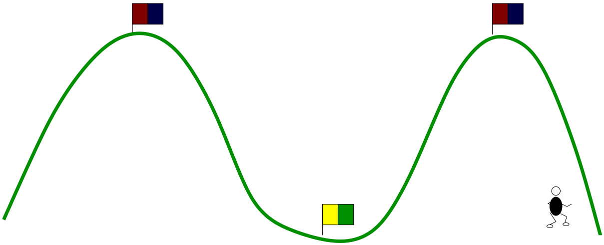


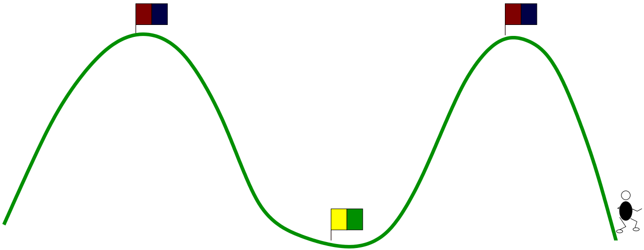
Mais le messager peut se perdre !











L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

À l'arrivée du messager, le général 2 accepte l'heure H
et envoie une messager avec son accord.

L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

À l'arrivée du messager, le général 2 accepte l'heure H
et envoie une messager avec son accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il sait que le général 2 connaît l'heure qu'il a proposée et l'accepte.

L'attaque coordonnée

Le général 1 choisit une heure pour l'attaque, disons H
et envoie une messager.

À l'arrivée du messager, le général 2 accepte l'heure H
et envoie une messager avec son accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il sait que le général 2 connaît l'heure qu'il a proposée et l'accepte.

Le général 2 attaquera à l'heure H si il (général 2) sait que le général 1 sait qu'il (général 2) connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 1 doit envoyer un second messager avec un accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il (général 1) sait que le général 2 sait qu'il (général 1) sait que le général 2 connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 2 doit envoyer un second messager avec un accord.

Le général 1 attaquera à l'heure H si il (général 1) sait que le général 2 sait qu'il (général 1) sait que le général 2 connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 2 doit envoyer un second messager avec un accord.

Le général 2 attaquera à l'heure H si il (général 2) sait que le général 1 sait qu'il (général 2) sait que le général 1 sait qu'il (général 2) connaît l'heure proposée et l'accepte.

Le général 1 doit envoyer un troisième messager avec un accord.

$$\vdots$$

L'attaque coordonnée

Le processus ne va jamais s'arrêter.

L'attaque coordonnée

Le processus ne va jamais s'arrêter.

*On peut démontrer qu'***avec des communications asynchrones***, une attaque coordonnée* **n'est pas possible***.*

L'attaque coordonnée

Le processus ne va jamais s'arrêter.

*On peut démontrer qu'***avec des communications asynchrones***, une attaque coordonnée* **n'est pas possible***.*

L'acquisition d'une **connaissance commune** *n'est pas possible de façon asynchrone.*

Plan


THE PENT

Le secrétaire américain à la Défense Donald Rumsfeld, lors d’un point de presse en février 2002 :

> *«Les informations annonçant que quelque chose n’a pas eu lieu m’intéressent toujours pour la bonne raison que, comme vous le savez, ce sont des nouvelles connues ; il y a des choses que nous savons que nous savons»*

> *«Nous savons aussi qu’il y a des choses inconnues ; ce qui revient à dire que nous savons qu’il y a certaines choses dont nous ne savons rien. Mais il existe aussi des nouvelles inexistantes que nous ne connaissons pas – ce sont celles dont nous ignorons si nous les connaissons.»*

Plan

Des exemples

- L'attaque coordonnée
- Une déclaration
- Un jeu de cartes avec annonces

La logique de la connaissance

- Les modalités
- Les règles et les axiomes
- Les modèles
- L'énigme des enfants sales
- Correction et preuves

La logique épistémique pour quoi faire ?

Les as et les huit 1 / 3

Il y a huit cartes : quatre as et quatre 8.

Les as et les huit 1 / 3

Il y a huit cartes : quatre as et quatre 8.

Chaque joueur reçoit deux cartes qu'il ne regarde pas,
mais qu'il montre à tout le monde.

Les as et les huit 1 / 3

Il y a huit cartes : quatre as et quatre 8.

Chaque joueur reçoit deux cartes qu'il ne regarde pas,
mais qu'il montre à tout le monde.

Chaque joueur parle à son tour :

- Soit il dit *Je ne sais pas*,
- Soit il dit
  - *J'ai une paire*,
  - *J'ai un as et un huit*.

Les as et les huit 2 / 3

On fait autant de tours qu'il faut.

Il y a *toujours* un joueur qui peut deviner les cartes qu'il a.

Les as et les huit 2 / 3

On fait autant de tours qu'il faut.
Il y a *toujours* un joueur qui peut deviner les cartes qu'il a.

Comment cela se peut-il ?

Les as et les huit 3 / 3

1re donne 1 : $A+A$ 2 : $8+8$ 3 : $8+8$

Les as et les huit 3 / 3

1re donne	1 : $A + A$	2 : $8 + 8$	3 : $8 + 8$
2e donne	1 : $A + A$	2 : $8 + 8$	3 : $A + A$

Les as et les huit 3 / 3

1re donne	1 : $A + A$	2 : $8 + 8$	3 : $8 + 8$
2e donne	1 : $A + A$	2 : $8 + 8$	3 : $A + A$
3e donne	1 : $A + A$	2 : $8 + 8$	3 : $A + 8$

Les as et les huit 3 / 3

1re donne	1	$: A + A$	2	$: 8 + 8$	3	$: 8 + 8$
2e donne	1	$: A + A$	2	$: 8 + 8$	3	$: A + A$
3e donne	1	$: A + A$	2	$: 8 + 8$	3	$: A + 8$
4e donne	1^2	$: A + 8$	2	$: 8 + 8$	3	$: A + 8$

Les as et les huit 3 / 3

1^{re} donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : 8 + 8$
2^{e} donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + A$
3^{e} donne	$1 : A + A$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + 8$
4^{e} donne	$1^2 : A + 8$	$2 : 8 + 8$	$3 : A + 8$
5^{e} donne	$1 : A + 8$	$2^2 : A + 8$	$3 : A + 8$

Les as et les huit 3 / 3

1re donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2e donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3e donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4e donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5e donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6e donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$

Les as et les huit 3 / 3

1^re^ donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2^e^ donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3^e^ donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4^e^ donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5^e^ donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6^e^ donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$
7^e^ donne	1 : $8+8$	2 : $8+8$	3 : $A+A$

Les as et les huit 3 / 3

1^{re} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4^{e} donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5^{e} donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6^{e} donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$
7^{e} donne	1 : $8+8$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
8^{e} donne	1 : $8+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+A$

Les as et les huit 3 / 3

1re donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2e donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3e donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4e donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5e donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6e donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$
7e donne	1 : $8+8$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
8e donne	1 : $8+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+A$
9e donne	1 : $8+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+8$

Les as et les huit 3 / 3

1^{re} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $8+8$
2^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
3^{e} donne	1 : $A+A$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
4^{e} donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+8$
5^{e} donne	1 : $A+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+8$
6^{e} donne	1 : $A+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+A$
7^{e} donne	1 : $8+8$	2 : $8+8$	3 : $A+A$
8^{e} donne	1 : $8+8$	2^2 : $A+8$	3 : $A+A$
9^{e} donne	1 : $8+8$	2 : $A+8$	3^2 : $A+8$
10^{e} donne	1^2 : $A+8$	2 : $8+8$	3 : $A+A$

Plan

Plan

Les modalités

Une modalité est un opérateur

qui **transforme** une proposition en une autre proposition.

On crée un modalité K_A pour chaque agent A.

Une logique avec des modalités s'appelle une **logique modale**.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 - 1716)

Qu'est-ce que la logique de la connaissance ?

- La **logique de la connaissance** ou **logique épistémique** est la logique qui formalise
  - «L'agent i sait que φ», noté $K_i(\varphi)$,
  - «φ est une connaissance commune», noté $C(\varphi)$.

La connaissance commune

$C(\varphi)$ formalise des phrases comme

- «φ est un fait bien connu sauf des irrationnels.»
- «L'agent i *sait que* l'agent j *sait que* l'agent i *sait que* , etc.».

La connaissance commune

$C(\varphi)$ formalise des phrases comme

- «φ est un fait bien connu sauf des irrationnels.»
- «L'agent i *sait que* l'agent j *sait que* l'agent i *sait que* , etc.».

On a besoin d'une modalité E, dite de «connaissance partagée», «Tout le monde *sait que* φ»,

$$E_G(\varphi) = \bigwedge_{i \in G} K_i(\varphi).$$

La connaissance commune

$C(\varphi)$ formalise des phrases comme

- «φ est un fait bien connu sauf des irrationnels.»
- «L'agent i *sait que* l'agent j *sait que* l'agent i *sait que* , etc.».

On a besoin d'une modalité E, dite de «connaissance partagée», «Tout le monde *sait que* φ»,

$$E_G(\varphi) = \bigwedge_{i \in G} K_i(\varphi).$$

La **connaissance commune** *n'est pas* la **connaissance partagée**.

Plan

Les règles

C'est une logique qui se présente avec un symbole $\vdash$

$\vdash \varphi$ signifie **«φ est un théorème»**:

Le **modus ponens**

$$\frac{\vdash \varphi \qquad \vdash \varphi \Rightarrow \psi}{\vdash \psi}\,(MP)$$

La règle de **généralisation de la connaissance**

$$\frac{\vdash \varphi}{\vdash K_i\varphi}\,(GK)$$

Les axiomes 1 / 3

Il y a **tous les théorèmes de la logique propositionnelle classique**.

$$\frac{}{\vdash \varphi}\ (C\ell) \qquad \text{si } \varphi \text{ est un théorème de la logique classique.}$$

Les axiomes 1 / 3

Il y a **tous les théorèmes de la logique propositionnelle classique**.

$$\frac{}{\vdash \varphi}\,(C\ell) \qquad \text{si } \varphi \text{ est un théorème de la logique classique.}$$

Par exemple

$$\psi \equiv (K_i\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi$$

qui est une instance de $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Les axiomes 2 / 3

Il y a quatre axiomes.

Axiome (de distribution)

$$\frac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\ (\mathbf{K})$$

Axiome (de la connaissance)

$$\frac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\mathbf{T})$$

une preuve

Les axiomes 3 / 3

Axiome (d'**introspection positive**)

$$\frac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi}\,(\mathbf{4})$$

Axiome (d'**introspection négative**)

$$\frac{}{\vdash \neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi}\,(\mathbf{5})$$

une autre preuve

formule de Barcan

Attention

En logique modale **on n'a pas** la **règle de déduction**

«Si à partir de φ et des hypothèses de Γ on prouve ψ»
on ne peut pas en déduire que
«Γ induit $\varphi \Rightarrow \psi$»

Pourquoi ?

Axiome de la connaissance partagée

Définition de E_G

$$\frac{}{\vdash E_G(\varphi) \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in G} K_i(\varphi)}\ (E)$$

Point fixe

Si l'on a une fonction $f : E \longrightarrow E$.

Une valeur a telle que $a = f(a)$ est un point fixe de f.

Le point fixe satisfait donc
$a = f(a) = f(f(a)) = f(f(f(a))) = \ldots = f(...f(a)...) = \ldots$.

Axiome et règle de la connaissance commune

Prenons pour f : *Propositions* $:\longrightarrow$ *Propositions*, la fonction

$$\alpha \mapsto \varphi \wedge E_G(\alpha).$$

On voit que $f(\alpha) \Rightarrow \alpha$ c'est-à-dire $\varphi \wedge E_G(\alpha) \Rightarrow \alpha$

α est un point fixe de f si il satisfait l'inégalité $\alpha \Rightarrow \varphi \wedge E_G(\alpha)$.

Axiome et règle de la connaissance commune

Prenons pour $f : Propositions :\longrightarrow Propositions$, la fonction

$$\alpha \mapsto \varphi \wedge E_G(\alpha).$$

On voit que $f(\alpha) \Rightarrow \alpha$ c'est-à-dire $\varphi \wedge E_G(\alpha) \Rightarrow \alpha$

α est un point fixe de f si il satisfait l'inégalité $\alpha \Rightarrow \varphi \wedge E_G(\alpha)$.

D'où l'axiome:

$$\frac{}{\vdash C_G\varphi \Rightarrow \varphi \wedge E_G(C_G\varphi)}\ (C)$$

Axiome et règle de la connaissance commune

Prenons pour f : *Propositions* $:\longrightarrow$ *Propositions*, la fonction

$$\alpha \mapsto \varphi \wedge E_G(\alpha).$$

On voit que $f(\alpha) \Rightarrow \alpha$ c'est-à-dire $\varphi \wedge E_G(\alpha) \Rightarrow \alpha$

α est un point fixe de f si il satisfait l'inégalité $\alpha \Rightarrow \varphi \wedge E_G(\alpha)$.

D'où l'axiome:

$$\frac{}{\vdash C_G\varphi \Rightarrow \varphi \wedge E_G(C_G\varphi)}\ (C)$$

$C_G\varphi$ est de plus **le plus petit point fixe**,

c'est-à-dire si un α satisfait $\alpha \Rightarrow \varphi \wedge E_G(\alpha)$ alors $\alpha \Rightarrow C_G\varphi$.

$$\frac{\vdash \alpha \Rightarrow \varphi \wedge E_G(\alpha)}{\vdash \alpha \Rightarrow C_G\varphi}\ (RC)$$

Pour résumer

$$\frac{\varphi \text{ est une tautologie classique}}{\vdash \varphi}\ (C\ell)$$

$$\frac{\vdash \varphi \qquad \vdash \varphi \Rightarrow \psi}{\vdash \psi}\ (MP) \qquad \frac{\vdash \varphi}{\vdash K_i\varphi}\ (GK)$$

$$\frac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\ (\mathbf{K}) \qquad \frac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\mathbf{T})$$

$$\frac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow K_iK_i\varphi}\ (\mathbf{4}) \qquad \frac{}{\vdash \neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\varphi}\ (\mathbf{5})$$

$$\frac{}{\vdash E_G(\varphi) \Leftrightarrow \bigwedge_{i\in G} K_i(\varphi)}\ (E)$$

$$\frac{}{\vdash C_G\varphi \Rightarrow \varphi \wedge E_G(C_G\varphi)}\ (C) \qquad \frac{\vdash \psi \Rightarrow \varphi \wedge E_G(\psi)}{\vdash \psi \Rightarrow C_G\varphi}\ (RC)$$

Plan

Des exemples

- L'attaque coordonnée
- Une déclaration
- Un jeu de cartes avec annonces

La logique de la connaissance

- Les modalités
- Les règles et les axiomes
- Les modèles
- L'énigme des enfants sales
- Correction et preuves

La logique épistémique pour quoi faire ?

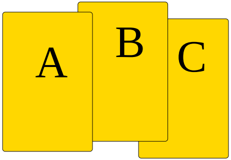
Les modèles de Kripke *1 / 1*

Un **modèle de Kripke** est fait

- de **mondes**,
- d'une relation d'**accessibilité** entre mondes,
- d'une **initialisation** I des variables.

Un jeu très simple 1 / 3

2 agents, 3 cartes $\{A, B, C\}$.



L'agent 1 reçoit une carte

L'agent 2 reçoit un carte

La troisième carte est retournée face contre la table

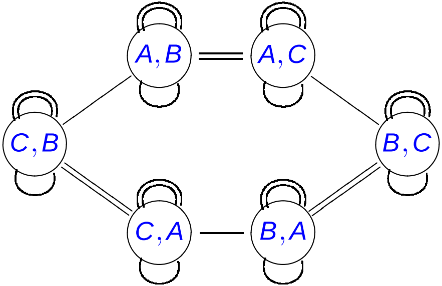
Il y a six mondes possibles :

$$(A, B), (A, C), (B, A)(B, C), (C, A), (C, B).$$

Un jeu très simple 2 / 3

La relation d'accessibilité de l'agent 1 est notée par $=$

Dans le monde (A,B) l'agent 1 envisage deux mondes possibles à savoir (A,B) et (A,C).



Le modèle de Kripke $\mathcal{M}$

Un jeu très simple 3 / 3

Les propositions primitives sont

- $1A$ le joueur (l'agent) 1 détient la carte A,
- $2A$ le joueur (l'agent) 2 détient la carte A,
- $1B$ le joueur (l'agent) 1 détient la carte B,
- $2B$ le joueur (l'agent) 2 détient la carte B,
- $1C$ le joueur (l'agent) 1 détient la carte C,
- $2C$ le joueur (l'agent) 2 détient la carte C.

Des assertions de forçage

$(A, B) \Vdash 1A \wedge 2B$,
$(A, B) \Vdash K_1(2B \vee 2C)$,
$(A, B) \Vdash K_1 \neg K_2(1A)$.

forçage

Pour tout monde u l'assertion $u \Vdash K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$ est vraie

donc $\mathcal{M}$ modélise $K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$

ce qui s'écrit $\mathcal{M} \models K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$.

Des assertions de forçage

forçage

$(A, B) \Vdash 1A \wedge 2B$,
$(A, B) \Vdash K_1(2B \vee 2C)$,
$(A, B) \Vdash K_1 \neg K_2(1A)$.

Pour tout monde u l'assertion $u \Vdash K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$ est vraie
donc $\mathcal{M}$ modélise $K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$
ce qui s'écrit $\mathcal{M} \models K_1(2A \vee 2B \vee 2C)$.

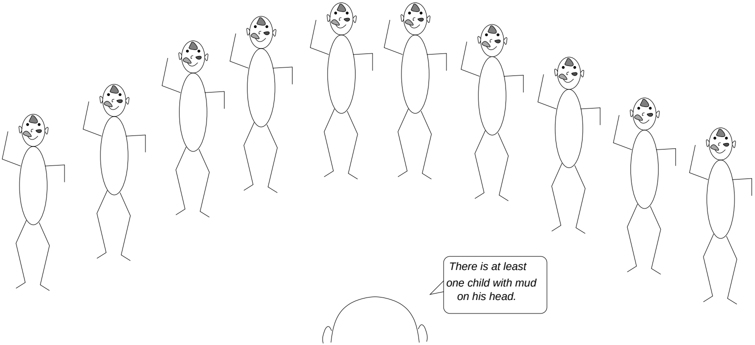
Si tout modèle modélise φ, on dit que «φ est valide»,
ce qui s'écrit $\models \varphi$.

Plan

Les enfants sales

- Il y a n enfants dont certains ont de la saleté sur le front.
- Le père déclare «L'un d'entre vous a de la saleté sur le front».

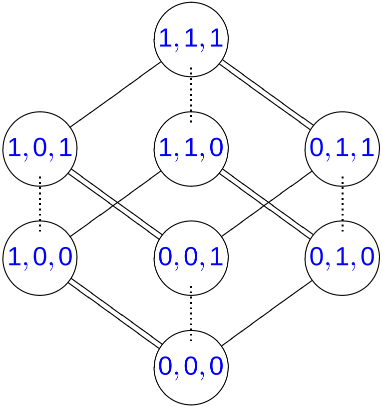
Les enfants sales



Les enfants sales

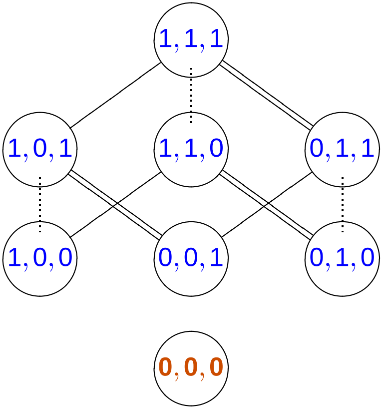
- Il y a n enfants dont certains ont de la saleté sur le front.
- Le père déclare «L'un d'entre vous a de la saleté sur le front».
- Puis le père pose plusieurs fois (combien ?) la question «Avez-vous de la saleté sur le front ?».
- Comme les n enfants ont tous de la saleté sur le front.
- Après n questions du père, ils répondent tous ensemble «oui».

Le modèle de Kripke pour trois enfants sales

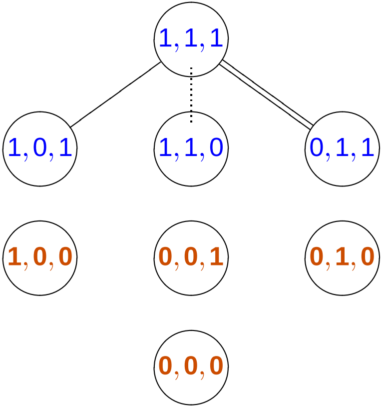


On abandonne les boucles de réflexivité.

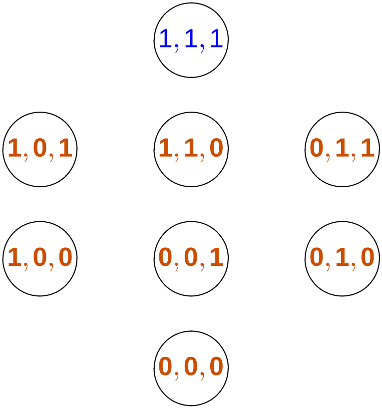
Après que le père a parlé



Après que le père a posé sa première question



Après que le père a posé sa deuxième question



Plan

Correction

Théorème (*Correction*)
Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Théorème (*Complétude*)
Si $\models \varphi$ *alors* $\vdash \varphi$.

Plan

La logique épistémique pour quoi faire ?

De grands domaines d'application

- la théorie des jeux:
  - économie,
  - Internet,
  - les décisions stratégiques,
- l'interrogation de bases de connaissance,
- les protocoles de de sécurité,
- l'étude du concept de rationalité en philosophie.

Pourquoi pas la règle de déduction ?

Si on avait la règle de déduction *«De* $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ *je déduis* $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$*»*
alors du jugement $\varphi \vdash K_i\varphi$ on aurait $\varphi \models K_i\varphi$,
c'est-à-dire *«Si dans tous les mondes de l'univers en question,* φ *est vrai, alors chaque agent* i *sait* φ*»*
on pourrait déduire $\models \varphi \Rightarrow K_i\varphi$
c'est-à-dire «Si φ est vrai alors chaque agent i sait φ».

retour

Une preuve

$$\vdash K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi$$

Une preuve

$$\vdash K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash K_i\varphi \Rightarrow K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi}\,(K) \qquad \dfrac{}{\vdash (K_i\varphi \Rightarrow K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\psi) \Rightarrow (K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi)}\,(CI)}{\vdash K_i(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow K_i\varphi \Rightarrow K_i\psi}\,(MP)$$

retour

Une autre preuve

On peut prouver $\vdash \varphi \Rightarrow K_i \neg K_i \neg \varphi$.

Une autre preuve

On peut prouver $\vdash \varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi$.

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\vdash \neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi}\,(\mathbf{5})
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\vdash \psi}\,(C\ell)
\qquad
\dfrac{}{\vdash K_i\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,(\mathbf{T})
}{\vdash (\neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi}\,(MP)
}{\vdash \varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi}\,(MP)
$$

où $\psi \equiv (K_i\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\neg K_i\varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow K_i\neg K_i\neg\varphi$
qui est un théorème classique.
Car c'est une instance de $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Accessibilité et forçage

1. Si φ est une **variable** p:

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in I_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une **conjonction** $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une **disjonction** $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{or} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

4. Si φ est une **implication** $\psi \Rightarrow \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{implique} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

5. Si $\perp$ est **absurde**, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \perp$.

Accessibilité et forçage

6. Si φ est une **modalité** $K_i(\psi)$ alors

$$u \Vdash K_i(\psi) \qquad \text{ssi} \qquad (\forall v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ u\ R_i\ v \quad \text{implies} \quad v \Vdash \psi.$$

Cela signifie aussi que

l'agent i sait ψ dans le monde u

si et seulement si

dans chaque monde qu'il tient comme possible ψ est satisfaite.

Accessibilité et forçage

7. Si φ est une **modalité** $C_G(\psi)$ alors

$$u \Vdash C_G(\psi) \qquad \text{ssi} \qquad (\forall v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\, u\, \big(\bigcup_{i\in G} R_i\big)^*\, v \quad \text{implies} \quad v \Vdash \psi.$$

Cela signifie aussi que

$C_G(\psi)$ est satisfaite dans le monde u
si et seulement si
dans chaque monde accessible
par un chemin d'accessibilité, ψ est satisfaite.

Accessibilité et forçage

On doit avoir

$$u \Vdash K_i \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ v\ R_i\ u \Rightarrow v \Vdash \varphi.$$

Autrement dit, $u \Vdash K_i\varphi$ si et seulement si, dans tous les mondes accessibles par R_i à partir de u, on a φ.
Ou encore, l'agent i sait φ si dans tous les mondes qu'il peut envisager, φ est satisfaite.

Retour

Formule de Barcan

Axiome (**Barcan**)

$$\vdash (\forall a \in A)\, K_i(P(a)) \quad \Rightarrow \quad K_i((\forall a \in A)\, P(a))$$

retour