TD 1

Exercice 1. *Les tomates c'est fini !*

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants

1. $L = \emptyset$
2. $L = \{\epsilon\}$
3. $L = \{0^n 1^m | n, m \geq 0\}$
4. $L = \{x \in \{0,1\}^* |\ x$ se termine par $101\}$
5. $L = \{x \in \{0,1\}^* |\ |x|_0$ pair et $|x|_1$ impair $\}$
6. L est l'ensemble des entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 0 modulo 3
7. k fixé, L est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la k^{ime} lettre en partant de la fin est un a.
8. $L = \{0^{n_1} 1^{m_1} 0^{n_2} 1^{m_2} \dots 0^{n_k} 1^{m_k} |\ k \geq 0$ et $\forall i,\ 1 \leq i \leq k,\ n_i, m_i > 0\}$
9. $L = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid$ chaque bloc de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros$\}$.
10. $L = (00 + 1)^*(11 + 0)^*$
11. Montrer que le langage suivant est rationnel :

    $L = \{a^i \mid$ Le chiffre 7 apparaît i fois consécutives dans le développement de π en base 10$\}$

Exercice 2.

Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels

1. $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$
2. $L = \{a^{n^2} | n \geq 0\}$

Exercice 3. *Petite parenthèse*

Soit $L \subset \{a, b\}^*$ le plus petit langage tel que

— $\varepsilon \in L$

— Si $w \in L$, $awb \in L$;

— Si $w_1, w_2 \in L$, leur concaténation $w_1 w_2$ est dans L.

✎ Montrer que L n'est pas régulier.

Exercice 4. *C'est la taille qui compte*

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 5.

1. Écrire un algorithme décidant si le langage d'un automate est infini.
2. Écrire un algorithme décidant si le langage d'un automate est vide.