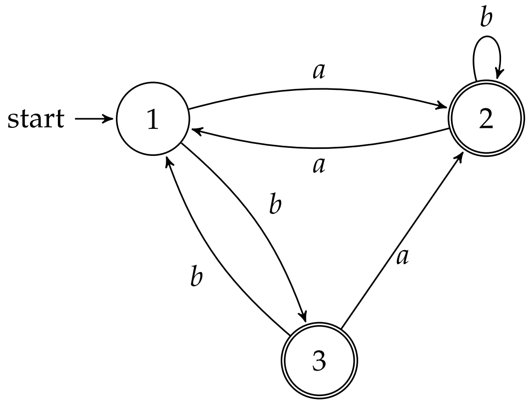
TD 8 (Révisions)

Exercice 1.

Donner une expression rationnelle pour le langage reconnu par l'automate ci-dessous (utiliser l'algorithme vu en cours) :



Exercice 2. *Distançons*

On définit la distance de Hamming d'un mot w à v de même taille comme le nombre de positions pour lesquelles ils diffèrent. La distance entre un mot w et un langage L est la distance minimale de w aux mots de L (infinie si non définie).

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et L rationnel. L' est l'ensemble des mots w à distance au plus k de L. Montrez que L' est rationnel.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et L algébrique. L' est l'ensemble des mots w à distance au plus k de L. Montrez que L' est algébrique.
3. Soit L un langage rationnel, et L' l'ensemble des mots w à distance au plus $\frac{|w|}{2}$ de L. Montrez que L' est algébrique.

Exercice 3.

Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

1. $L = \{0^n 1^n 0^n 1^n | n \geq 0\}$.
2. $L = \left\{0^n \# 0^{2n} \# 0^{3n} | n \geq 0\right\}$.
3. $L = \{w\#s | w \text{ est un sous-mot de } s, s \in \{a, b\}^*\}$.

Exercice 4.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $\Sigma = \{0, 1\}$. On définit le langage L sur Σ comme le langage des mots ayant un 1 en i^{e} position avant la fin. Par exemple si $i = 2$ alors $0010 \in L$ mais $1100 \notin L$.

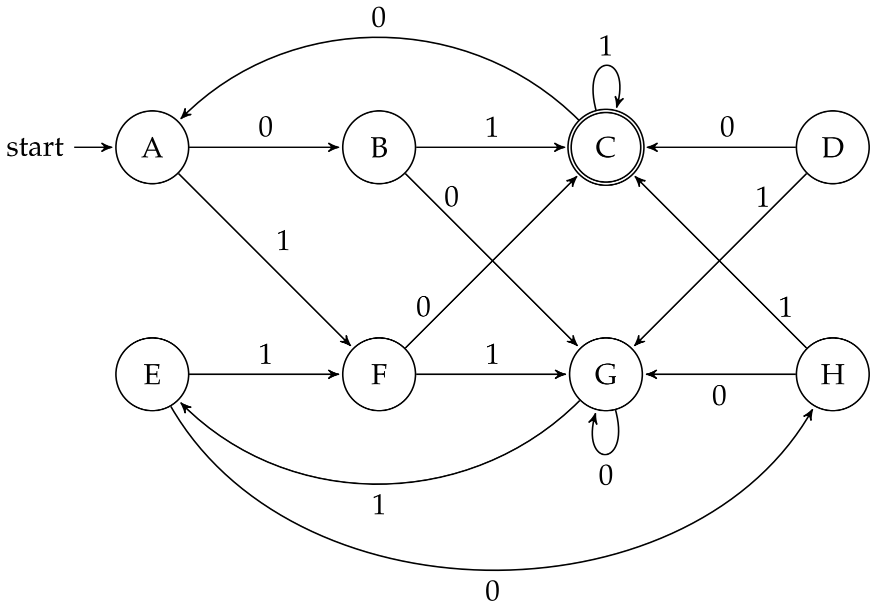
1. Donner un automate non déterministe avec $i + 1$ états reconnaissant L.
2. Soit w un mot de Σ avec $i - 1$ lettres. Calculer le langage résiduel $w^{-1}L = \{v \in \Sigma^* | wv \in L\}$.

3. En déduire une borne sur le nombre d'états de n'importe quel automate déterministe reconnaissant L. La comparer avec le nombre d'états dans la question 1.

Exercice 5.
Si $\mathcal{A}$ est un automate non-déterministe, appelons

— $M(\mathcal{A})$ l'automate mirroir de $\mathcal{A}$: les états finaux deviennent initiaux, les états initiaux finaux et les transitions changent de sens.
— $D(\mathcal{A})$ l'automate déterministe associé à $\mathcal{A}$, restreint à ses états accessibles

1. Soit $\mathcal{A}$ l'automate suivant. Minimiser $\mathcal{A}$, puis calculer $D(M(D(M(\mathcal{A}))))$.



2. Montrer que $\mathcal{A}$, $D(M(D(M(\mathcal{A}))))$ est minimal pour tout $\mathcal{A}$.

Exercice 6. *Préfixons*

Pour un langage L, on définit $min(L)$ comme l'ensemble des mots de L qui n'ont pas de préfixe stricts dans L :

$$min(L) = \{w \in L \mid \forall v \text{ préfixe strict de } w,\ v \notin L\}$$

1. Soit L algébrique et déterministe. Prouvez que $min(L)$ est algébrique et déterministe.
2. Soit $L = \{a^i b^j c^k \mid k \geq i \text{ ou } k \geq j\}$. Montrez que $min(L)$ n'est pas algébrique.
3. On définit $max(L)$ comme l'ensemble des mots de L qui ne sont pas le préfixe strict de mots de L. Trouvez un langage algébrique L tel que $max(L)$ ne soit pas algébrique.