

TD 13

Exercice 1.*La poste par correspondance*

Σ est un alphabet fini et P un ensemble fini de paires de mots sur Σ . Le Problème de Correspondance de Post associé à Σ, P est l’existence d’une suite non vide $(v_i, w_i)_i$ d’éléments de P telle que la concaténation des v_i soit égale à la concaténation des w_i . Le Problème de Correspondance de Post Modifié est celui de l’existence d’une telle suite lorsque le premier terme est fixé.

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :

1. $P = (aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)$
2. $P = (a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)$
3. $P = (ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)$
4. $P = (a, abb), (aab, b), (b, aa), (bb, bba)$

2. Montrer que si Σ ne contient qu’une lettre le problème est décidable.

3. Montrer l’équivalence entre PCP et PCPM, c’est à dire qu’à partir d’un algorithme résolvant toute instance de PCP, vous pouvez créer un algorithme résolvant toute instance de PCPM, et inversement.

*Indication : Dans le cas PCP permet de résoudre PCPM, vous pourrez ajouter à l’alphabet deux lettres * et \$ et utiliser les deux morphismes p et s suivant :*

$$\forall a_1 \dots a_k \in \Sigma^*, p(a_1 \dots a_k) = *a_1 * \dots * a_k \text{ et } s(a_1 \dots a_k) = a_1 * \dots a_k *.$$

4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) dans PCPM?

5. Montrer que PCP est indécidable.

Indication : Pour montrer cela, vous pouvez montrer que PCP permet de résoudre l’arrêt : à une machine M et une entrée x on peut créer une instance de PCP qui est acceptée si et seulement si la machine M s’arrête sur l’entrée x .

Exercice 2.*Calculs (in)faisables?*

Les fonctions suivantes sont-elles calculables?

1. la fonction partielle R définie par $R(\mathfrak{M}, x) = n_{\rightarrow}$ où n_{\rightarrow} est le nombre de mouvements vers la droite que fait la tête de la machine \mathfrak{M} lors du calcul sur l’entrée x .
2. la fonction Q définie par $Q(\mathfrak{M}, x) = n_q$ où n_q est le nombre d’états utilisés par la machine \mathfrak{M} lors du calcul sur l’entrée x .
3. l’entrée n utilisera un alphabet composé des quantificateurs \forall et \exists , des variables $\{x_1, \dots, x_k\}$ à interpréter sur \mathbb{N} , les symboles $+$ et $=$ et les connecteurs booléens \wedge, \vee, \neg . Par exemple : $\forall x_1, x_2 (\exists x_3 x_1 + x_2 = x_3) \wedge (\exists x_4 x_2 = x_4)$. n est une entrée *valide* si n représente une formule sans variable libre (toutes les variables qui apparaissent sont précédemment quantifiées).

La fonction f est la suivante : si n est valide, $f(n)$ renvoie une preuve que la formule n est vraie ou fausse, et sinon $f(n)$ est le symbole blanc.

4. l’entrée n représente un polynôme à coefficients entiers une (resp. à plusieurs) variable(s) et $f(n)$ renvoie une racine entière du polynôme si cela existe, et ε sinon.

Exercice 3.

Re

Un nombre réel a est dit *récuratif* s'il est *récurativement approximable par des rationnels*, c'est-à-dire s'il existe des fonctions récuratives F et G de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et $\left| a - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}$.

1. Montrer que tout nombre rationnel est récuratif.
2. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$ et e sont récuratifs.
3. Montrer que l'ensemble des réels récuratifs est dénombrable.
4. Donner un exemple de réel non récuratif.

Exercice 4.

Encodages

1. Trouver une bijection primitive récurative entre \mathbb{N} et \mathbb{N}^2 . Concrètement, on souhaite trouver $\alpha : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ et des projections $\pi_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ($i \in \{1, 2\}$) telles que :

$$\pi_i(\alpha(n_1, n_2)) = n_i \quad \alpha(\pi_1(p), \pi_2(p)) = p$$

2. Trouver une bijection $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ entre les listes d'entiers et les entiers, une fonction $\text{cons} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitive récurative tel que :

$$\text{cons}(n, \lceil \ell \rceil) = \lceil n :: \ell \rceil$$

3. Trouver un opérateur fold tel que pour toute fonction primitive récurative $z : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$ et $r : \mathbb{N}^{k+2+n} \rightarrow \mathbb{N}^n$, on ait $\text{fold}(z, r) : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}^n$ primitif récuratif vérifiant :

$$\text{fold}(z, r)(a_1 \dots a_k, \lceil [] \rceil) = z(a_1 \dots a_k)$$

$$\text{fold}(z, r)(a_1 \dots a_k, \lceil h :: t \rceil) = r(a_1 \dots a_k, h, \lceil t \rceil, \text{fold}(z, r)(a_1 \dots a_k, \lceil t \rceil))$$

4. (Difficile) Comment généraliser cela aux arbres ? On note $\bar{\cdot} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ la bijection entre les arbres et les entiers, et $\lfloor \cdot \rfloor : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{N}$ la bijection entre les listes d'arbre et les entiers. (On rappelle qu'un arbre est soit un arbre vide, soit une paire d'un entier et d'une liste d'arbres.)

Exercice 5.

Énumération

On dit que la fonction $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est une *fonction d'énumération* pour l'ensemble A de fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{N} si pour tout e , la fonction $\varphi_e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi_e(x) = \varphi(e, x)$ est dans A , et si réciproquement, pour toute fonction $f \in A$, il existe $e \in \mathbb{N}$ telle que $\forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = \varphi_e(x)$.

Montrer que \mathcal{REC}_1 , l'ensemble des fonctions récuratives d'arité 1, admet une fonction d'énumération récurative.