Partie I : parité démographique en classification supervisée

On cherche à prédire une variable d'intérêt $Y \in \{1, \ldots, K\}$ à partir d'une variable explicative $X \in \mathbf{R}$. On note f_X la loi de X et $p_k(x) = \mathbf{P}(Y = k | X = x)$. Une règle de classification g est une fonction mesurable de $\mathbf{R}$ dans $\{1, \ldots, K\}$. Son risque $R(g)$ est défini par

$$R(g) = \mathbf{P}(g(X) \neq Y).$$

1. Montrer que
$$R(g) = \int_{\mathbf{R}} \{1 - p_{g(x)}(x)\} f_X(dx).$$

2. En déduire une règle de classification $g^\star$ minimisant le risque R.

On cherche maintenant à prédire $Y \in \{1, \ldots, K\}$ à partir de X et d'une variable sensible $S \in \{-1, 1\}$: une règle de classification devient une fonction mesurable g de $\mathbf{R} \times \{-1, 1\}$ dans $\{1, \ldots, K\}$ dont le risque est $R(g) = \mathbf{P}(g(X, S) \neq Y)$. On note $\pi_s = \mathbf{P}(S = s)$, $p_k(x, s) = \mathbf{P}(Y = k | X = x, S = s)$ et $f_{X|S}(\cdot|s)$ la loi conditionnelle de X sachant $S = s$. Pour des raisons d'équité, on souhaite que la règle de classification g respecte la parité démographique définie par,

$$\forall\, 1 \leq k \leq K,\ \mathbf{P}(g(X, S) = k | S = 1) = \mathbf{P}(g(X, S) = k | S = -1).$$

3. On peut penser que le problème d'équité est résolu si on efface la variable S du problème et considère la prédiction de Y en fonction de X seulement. Construire un exemple minimal où la règle optimale $g^\star$ définie dans la question 2 (fonction seulement de X) ne respecte pas la parité démographique.

4. Pour résoudre le problème de parité démographique, on cherche une règle de classification g solution du problème d'optimisation
$$\begin{aligned} &\min_{g : \mathbf{R} \times \{-1,1\} \to \{1,\ldots,K\}} R(g) = \mathbf{P}(g(X, S) \neq Y) \\ &\text{s.c. } \forall\, 1 \leq k \leq K,\ \mathbf{P}(g(X, S) = k | S = 1) = \mathbf{P}(g(X, S) = k | S = -1). \end{aligned} \tag{1}$$
Pour cela, on considère le Lagrangien du problème,
$$L(g, \lambda) = R(g) + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \left\{ \mathbf{P}(g(X, S) = k | S = 1) - \mathbf{P}(g(X, S) = k | S = -1) \right\},$$
où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_K) \in \mathbf{R}^K$. Montrer que
$$L(g, \lambda) = 1 - \sum_{k=1}^{K} \sum_{s \in \{-1,1\}} \int_{\mathbf{R}} \{\pi_s p_k(x, s) - s\lambda_k\} \mathbf{1}_{\{g(x,s)=k\}} f_{X|S}(dx|s).$$

5. Pour tout λ, on note $R_\lambda(g) = L(g, \lambda)$ et $g^\star_\lambda$ la règle de classification qui minimise R_λ. Montrer que
$$g^\star_\lambda(x, s) \in \operatorname*{arg\,max}_{1 \leq k \leq K} p_k(x, s) - \frac{s\lambda_k}{\pi_s}.$$

6. On note $\lambda^\star$ le vecteur de coefficients qui maximise $\lambda \mapsto R_\lambda(g^\star_\lambda)$. Montrer que
$$\lambda^\star \in \operatorname*{arg\,min}_{\lambda \in \mathbf{R}^K} \sum_{s \in \{-1,1\}} \int_{\mathbf{R}} \max_{1 \leq k \leq K} \{\pi_s p_k(x, s) - s\lambda_k\} f_{X|S}(dx|s).$$

7. On admet que $g^\star_{\lambda^\star}$ résout le problème (1). Proposer une approche pour construire une règle de classification qui respecte la parité démographique à partir de données étiquetées $(X_i, S_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$.