Estimation non paramétrique pour les processus markoviens déterministes par morceaux

Romain Azaïs

1er Juillet 2013, Institut de Mathématiques de Bordeaux

Plan de la soutenance

0. **Introduction**
   - Vue d'ensemble de la thèse
   - Processus markoviens déterministes par morceaux
   - Problèmes d'estimation pour les PDMP

1. Estimation de la loi des temps inter-sauts d'un PDMP

2. Estimation récursive du noyau de transition d'un PDMP

3. Conclusion et perspectives

Vue d'ensemble de la thèse

Première partie : estimation d'un taux de saut

1. Estimation du taux de saut de processus de renouvellement
   Nonparametric estimation of the jump rate for nonhomogeneous marked renewal processes (à paraître dans Annales de l'IHP, avec F. Dufour et A. Gégout-Petit)
   A hidden renewal model for monitoring aquatic systems biosensors (soumis, avec R. Coudret et G. Durrieu)
2. Estimation de la loi des temps inter-sauts d'un PDMP
   Nonparametric estimation of the conditional distribution of the inter-jumping times for piecewise-deterministic Markov processes (en révision, avec F. Dufour et A. Gégout-Petit)
   Package EstSimPDMP disponible sur le site du CRAN

Vue d'ensemble de la thèse

Première partie : estimation d'un taux de saut

1. Estimation du taux de saut de processus de renouvellement
   Nonparametric estimation of the jump rate for nonhomogeneous marked renewal processes (à paraître dans Annales de l'IHP, avec F. Dufour et A. Gégout-Petit)
   A hidden renewal model for monitoring aquatic systems biosensors (soumis, avec R. Coudret et G. Durrieu)
2. Estimation de la loi des temps inter-sauts d'un PDMP
   Nonparametric estimation of the conditional distribution of the inter-jumping times for piecewise-deterministic Markov processes (en révision, avec F. Dufour et A. Gégout-Petit)
   Package EstSimPDMP disponible sur le site du CRAN

Seconde partie : estimation d'une transition

3. Quantification optimale pour le modèle $Y = f(\beta' X, \varepsilon)$
   Optimal quantization applied to sliced inverse regression (paru dans JSPI, avec A. Gégout-Petit et J. Saracco)
4. Estimation du noyau de transition d'un PDMP
   A recursive nonparametric estimator for the transition kernel of a piecewise-deterministic Markov process (en révision)

Vue d'ensemble de la thèse

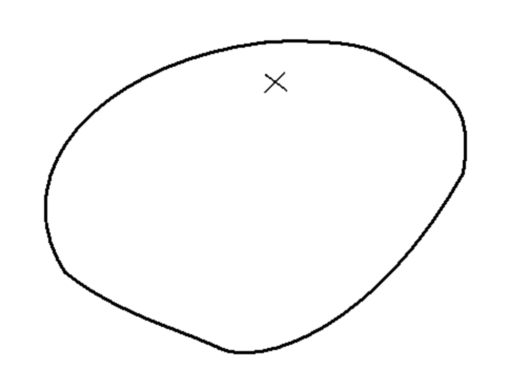
Première partie : estimation d'un taux de saut

1. Estimation du taux de saut de processus de renouvellement
   Nonparametric estimation of the jump rate for nonhomogeneous marked renewal processes (à paraître dans Annales de l'IHP, avec F. Dufour et A. Gégout-Petit)
   A hidden renewal model for monitoring aquatic systems biosensors (soumis, avec R. Coudret et G. Durrieu)
2. Estimation de la loi des temps inter-sauts d'un PDMP
   Nonparametric estimation of the conditional distribution of the inter-jumping times for piecewise-deterministic Markov processes (en révision, avec F. Dufour et A. Gégout-Petit)
   Package EstSimPDMP disponible sur le site du CRAN

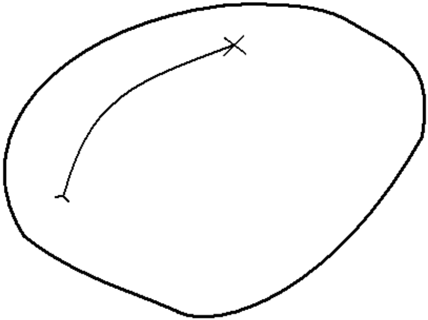
Seconde partie : estimation d'une transition

3. Quantification optimale pour le modèle $Y = f(\beta' X, \varepsilon)$
   Optimal quantization applied to sliced inverse regression (paru dans JSPI, avec A. Gégout-Petit et J. Saracco)
4. Estimation du noyau de transition d'un PDMP
   A recursive nonparametric estimator for the transition kernel of a piecewise-deterministic Markov process (en révision)

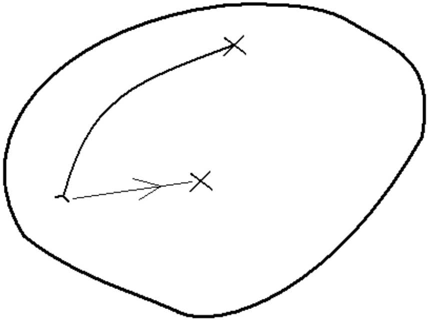
Processus markoviens déterministes par morceaux



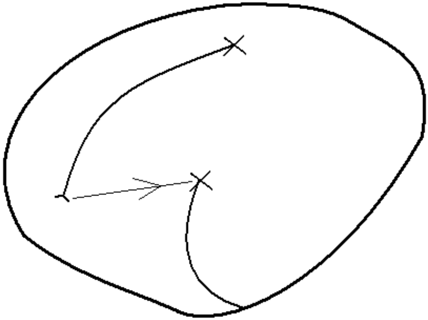
Processus markoviens déterministes par morceaux



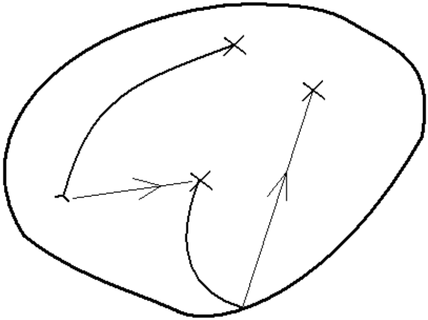
Processus markoviens déterministes par morceaux



Processus markoviens déterministes par morceaux



Processus markoviens déterministes par morceaux



Processus markoviens déterministes par morceaux

Un PDMP (X_t) défini sur un ouvert E d'un espace métrique est caractérisé par 3 ingrédients :

- $\Phi_x(t)$, un flot déterministe,
- $\lambda(x)$, un taux de saut,
- $Q(x, \mathrm{d}y)$, un noyau de transition.

Le temps déterministe d'atteinte de la frontière partant de x est

$$t^\star(x) = \inf\{t > 0 \,:\, \Phi_x(t) \in \partial E\}.$$

Processus markoviens déterministes par morceaux

Partant de $X_0 = x$, on détermine le premier temps de saut T_1 selon

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda\left(\Phi_x(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathbb{1}_{\{0\le t<t^\star(x)\}}.$$

Entre 0 et T_1, le processus évolue selon le flot Φ_x,

$$\forall 0 \le t < T_1,\ X_t = \Phi_x(t).$$

Au temps T_1, le processus « saute » selon le noyau Q,

$$X_{T_1} \sim Q(\Phi_x(T_1), \cdot).$$

Et ainsi de suite...

Chaîne immergée

On note T_n les temps de saut du processus.

- $(Z_n) = (X_{T_n})$ est la chaîne des positions du processus lors des sauts,
- $(S_n) = (T_n - T_{n-1})$ est la suite des temps inter-sauts.

Tout l'aléa est contenu dans le processus à temps discret (Z_n, S_n).

Applications des PDMP

Les sauts permettent de modéliser des changements d'«ambiance» intervenant à des instants aléatoires.

En fiabilité,

- le problème du réservoir,
- la corrosion sous des environnements changeants,
- la propagation de fissures.

En biologie,

- le modèle d'Hodgkin-Huxley généralisé,
- le mouvement d'une bactérie,
- la croissance d'une cellule.

Problèmes inférentiels

Deux sources d'aléa à estimer :

- la loi des temps inter-sauts, caractérisée par le taux de saut λ ;
- la loi des sauts, caractérisée par le noyau de Markov Q.

Le flot est souvent donné par l'application.

Problèmes d'estimation pour les PDMP

Problèmes inférentiels

Deux sources d'aléa à estimer :

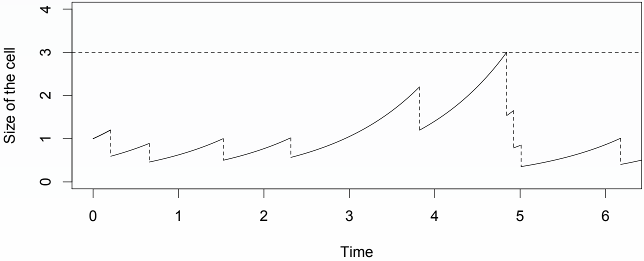
- la loi des temps inter-sauts, caractérisée par le taux de saut λ ;
- la loi des sauts, caractérisée par le noyau de Markov Q.

Le flot est souvent donné par l'application.

Cadre statistique retenu

- Une trajectoire (Z_n, S_n) observée en temps long.
- Ergodicité de la chaîne de Markov (Z_n).
- Estimation non paramétrique.

Évolution de la taille d'une cellule au cours du temps



Problèmes d'estimation pour les PDMP

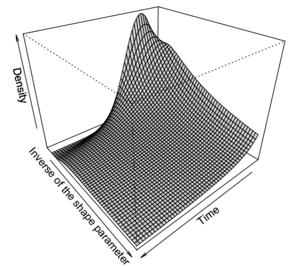
Pour ce processus,

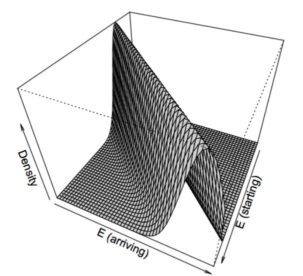
- $E =]0, 3[$,
- $\Phi_x(t) = x \exp(\tau t)$,
- $Q(x, \mathrm{d}y)$ est gaussien centré en $x/2$.

Commentaires

- Si ça n'a pas eu lieu avant, une cellule se divise lorsqu'elle atteint une taille de 3.
- Équation déterministe de la croissance d'une cellule.
- Une cellule se divise en deux cellules filles d'à peu près même taille.

Problèmes d'estimation pour les PDMP





Densité conditionnelle des temps inter-sauts (à gauche) et noyau de transition (à droite) du modèle de croissance-fragmentation.

Plan de la soutenance

0. Introduction

1. **Estimation de la loi des temps inter-sauts d'un PDMP**
   - Stratégie et liens avec les processus de renouvellement
   - Estimation de $\widetilde{\lambda}$
   - Approximation et estimation de f
   - Simulations

2. Estimation récursive du noyau de transition d'un PDMP

3. Conclusion et perspectives

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Estimer la loi de la durée S_n sachant $Z_{n-1} = x$

Cette loi

- ne dépend pas de n,
- a une masse en $t^\star(x)$,
- a une partie absolument continue sur $[0, t^\star(x)[$ donnée par

$$f(x,t) = \lambda\left(\Phi_x(t)\right) \exp\left(- \int_0^t \lambda\left(\Phi_x(s)\right) \mathrm{d}s \right).$$

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Estimer la loi de la durée S_n sachant $Z_{n-1} = x$

Cette loi

- ne dépend pas de n,
- a une masse en $t^\star(x)$,
- a une partie absolument continue sur $[0, t^\star(x)[$ donnée par

$$f(x,t) = \lambda\left(\Phi_x(t)\right) \exp\left(-\int_0^t \lambda\left(\Phi_x(s)\right) \mathrm{d}s\right).$$

Cadre de travail

- Espace d'état du PDMP : un ouvert E d'un espace métrique.
- Estimation non paramétrique à partir d'une observation de la suite (Z_n, S_n) en temps long.

Modèle multiplicatif d'Aalen

$N(t)$ processus de comptage tel que

$$M(t) = N(t) - \int_0^t \lambda(s)Y(s)\mathrm{d}s$$

est une martingale. Dans ce cadre,

$$\widehat{\Lambda}(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}N(s)}{Y(s)}$$

est l'estimateur de Nelson-Aalen de $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$.

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Pour tout entier i, le processus

$$t \mapsto \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}} - \int_0^t \lambda\left(\Phi_{Z_i}(s)\right) \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \mathrm{d}s$$

est une martingale dans la filtration $(\sigma(Z_i) \wedge \mathcal{F}_t^{i+1})_{0 \leq t < t^\star(Z_i)}$,

où $(\mathcal{F}_t^{i+1})$ est la filtration naturelle associée au processus

$$t \mapsto \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}}.$$

Suite naturelle : sommer ces martingales de telle sorte que la somme reste une martingale.

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Cas des processus « à flot constant »

Si le flot est constant,

$$\mathbb{E}\left[g(Z_{n+1})|Z_n, S_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left[g(Z_{n+1})|Z_n\right].$$

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Cas des processus « à flot constant »

Si le flot est constant,

$$\mathbb{E}\left[g(Z_{n+1})|Z_n, S_{n+1}\right] = \mathbb{E}\left[g(Z_{n+1})|Z_n\right].$$

Dans ce cas, on peut montrer que

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{n-1}\left[\mathbb{1}_{\{S_{i+1}\leq t\}} - \int_0^t \lambda\left(\Phi_{Z_i}(s)\right)\mathbb{1}_{\{S_{i+1}\geq s\}}\mathrm{d}s\right]$$

est une martingale dans la filtration

$$\left(\sigma(Z_0,\ldots,Z_{n-1}) \vee \bigvee_{i=0}^{n-1}\mathcal{F}_t^{i+1}\right).$$

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Cas général

La connaissance de Z_{n+1} peut apporter de l'information sur S_{n+1}.

- Exemple, si $Q(x, \cdot) = \delta_{\{x\}}$ et flot injectif. Sachant Z_n et Z_{n+1}, la loi de S_{n+1} est une Dirac en l'unique t tel que

$$\Phi_{Z_n}(t) = Z_{n+1}.$$

- Cette difficulté n'apparaît pas pour les processus de renouvellement marqués.

$\rightarrow$ On va étudier S_{n+1} conditionnellement à Z_n et Z_{n+1}.

Loi conditionnelle de S_{n+1} sachant Z_n et Z_{n+1}

Hypothèse : Q admet une densité q par rapport à une mesure μ.

On montre que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > t | Z_n, Z_{n+1}) = \widetilde{G}\left(Z_n, Z_{n+1}, t\right) \mathbb{1}_{\{0 \leq t < t^\star(Z_n)\}},$$

où $\widetilde{G}(x, y, t)$ est la fonction de survie associée au taux

$$\widetilde{\lambda}(x, y, t) = \frac{f(x,t) q\left(\Phi_x(t), y\right)}{p(x,y,t)},$$

avec

$$p(x,y,t) = \int_t^{t^\star(x)} f(x,t) q\left(\Phi_x(t), y\right) + G(x, t^\star(x)) q\left(\Phi_x(t^\star(x)), y\right).$$

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Et on a la structure de martingale recherchée : le processus

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \left[\mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}} - \int_0^t \widetilde{\lambda}(Z_i, Z_{i+1}, s) \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \mathrm{d}s \right]$$

est une martingale dans la filtration

$$\left(\sigma(Z_0, \ldots, Z_n) \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_t^{i+1} \right).$$

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Et on a la structure de martingale recherchée : le processus

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \left[\mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}} - \int_0^t \widetilde{\lambda}(Z_i, Z_{i+1}, s) \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \mathrm{d}s \right]$$

est une martingale dans la filtration

$$\left(\sigma(Z_0, \ldots, Z_n) \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_t^{i+1} \right).$$

$\rightarrow$ Estimation (d'une approximation) de $\widetilde{\lambda}(x, y, t)$.

Stratégie et liens avec les processus de renouvellement

Et on a la structure de martingale recherchée : le processus

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \left[\mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}} - \int_0^t \widetilde{\lambda}(Z_i, Z_{i+1}, s) \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \mathrm{d}s \right]$$

est une martingale dans la filtration

$$\left(\sigma(Z_0, \ldots, Z_n) \vee \bigvee_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}_t^{i+1} \right).$$

→ Estimation (d'une approximation) de $\widetilde{\lambda}(x, y, t)$.

→ Lien entre la densité d'intérêt $f(x, t)$ et cette approximation.

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Conséquence : si le noyau Q charge un ensemble discret $\mathcal{A}$, pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, le compensateur du processus de comptage

$$t \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}} \mathbb{1}_{\{Z_i = x\}} \mathbb{1}_{\{Z_{i+1} = y\}}$$

est

$$t \mapsto \int_0^t \widetilde{\lambda}(x, y, s) \left[\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \mathbb{1}_{\{Z_i = x\}} \mathbb{1}_{\{Z_{i+1} = y\}} \right] \mathrm{d}s.$$

$\rightarrow$ Hypothèse de modèle à intensité multiplicative vérifiée.

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Dans le cas général, on introduit une approximation $l(A, B, s)$ de $\widetilde{\lambda}(x, y, s)$ pour $x \in A$ et $y \in B$:

$$M^{(n)}_{A,B}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \leq t\}} \mathbb{1}_{\{Z_i \in A, Z_{i+1} \in B\}}$$

$$- \int_0^t \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\lambda}(Z_i, Z_{i+1}, s) \qquad \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \mathbb{1}_{\{Z_i \in A, Z_{i+1} \in B\}} \mathrm{d}s,$$

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Dans le cas général, on introduit une approximation $l(A,B,s)$ de $\widetilde{\lambda}(x,y,s)$ pour $x \in A$ et $y \in B$:

$$M_{A,B}^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_{i+1}\leq t\}} \mathbb{1}_{\{Z_i\in A, Z_{i+1}\in B\}} - \int_0^t l(A,B,s) Y_{A,B}^{(n)}(s) \mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\widetilde{\lambda}(Z_i, Z_{i+1}, s) - l(A,B,s) \Big) \mathbb{1}_{\{S_{i+1}\geq s\}} \mathbb{1}_{\{Z_i\in A, Z_{i+1}\in B\}} \mathrm{d}s,$$

où $Y_{A,B}^{(n)}(s) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_{i+1}\geq s\}} \mathbb{1}_{\{Z_i\in A, Z_{i+1}\in B\}}$.

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Choix de $l(A, B, t)$

- Le terme de reste doit aller vers 0.
- $l(A, B, t)$ doit approcher la fonction qui nous intéresse : $\widetilde{\lambda}(x, y, t)$.

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Choix de $l(A, B, t)$

- Le terme de reste doit aller vers 0.
- $l(A, B, t)$ doit approcher la fonction qui nous intéresse : $\widetilde{\lambda}(x, y, t)$.

$$l(A, B, t) = \frac{\int_{A \times B} \widetilde{f}(x, y, t) \widetilde{\nu}(\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y)}{\int_{A \times B} \widetilde{G}(x, y, t) \widetilde{\nu}(\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y)},$$

où $\widetilde{\nu}$ est la loi invariante du couple (Z_n, Z_{n+1}).

$\rightarrow$ Il s'agit d'une « moyennisation spatiale » de $\widetilde{\lambda}(x, y, t)$ contre la loi invariante.

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Estimation de $l(A,B,t)$

On passe par l'estimation de $L(A,B,t) = \int_0^t l(A,B,s)\mathrm{d}s$,

$$\widehat{L}_n(A,B,t) - L_n^*(A,B,t) \;=\; \widetilde{M}^{(n)}_{A,B}(t) \,+\, a_n(t),$$

où $\widehat{L}_n(A,B,t)$ est l'estimateur de Nelson-Aalen.

Estimation de $\widetilde{\lambda}$

Estimation de $l(A,B,t)$

On passe par l'estimation de $L(A,B,t) = \int_0^t l(A,B,s)\mathrm{d}s$,

$$\widehat{L}_n(A,B,t) - L_n^*(A,B,t) \; = \; \widetilde{M}^{(n)}_{A,B}(t) \; + \; a_n(t),$$

où $\widehat{L}_n(A,B,t)$ est l'estimateur de Nelson-Aalen.

Lissage de $\widehat{L}_n(A,B,t)$ pour obtenir $\widehat{l}_n(A,B,t)$,

$$\sup_{r_1 \leq t \leq r_2} \left| \widehat{l}_n(A,B,t) - l(A,B,t) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Lien entre la densité d'intérêt f et l'approximation l de $\widetilde{\lambda}$

Pour $x \in A$, le lien entre f et l est donné par

$$\left| f(x,t) - \sum_k l(A, B_k, t) P(A, B_k, t) \right| \leq C \max_k \operatorname{diam}(A \times B_k),$$

où (B_k) est une partition (finie) de E,

et où la fonction $P(A, B_k, t)$ est définie comme la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}_\nu(S_1 > t, Z_1 \in B_k | Z_0 \in A)$$

sous la mesure invariante ν de (Z_n).

Approximation et estimation de f

On approche $f(x,t)$ par $f(A,t) \; = \displaystyle\sum_k \; l(A,B_k,t) \; P(A,B_k,t)$

et on estime $f(A,t)$ par $\widehat{f}_n(A,t) = \displaystyle\sum_k \widehat{l}_n(A,B_k,t)\widehat{P}_n(A,B_k,t)$,

$$\text{où } \widehat{P}_n(A,B_k,t) \; = \; \frac{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{S_{j+1}>t\}} \mathbb{1}_{\{Z_{j+1}\in B_k\}} \mathbb{1}_{\{Z_j\in A\}}}{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{Z_j\in A\}}}$$

estime la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_\nu(S_1 > t, Z_1 \in B_k | Z_0 \in A)$.

Approximation et estimation de f

On montre que, pour tout $0 < t < \inf_{x\in A} t^\star(x)$, on a

$$\sup_{0\leq s\leq t}\left|\widehat{P}_n(A,B_k,s) - \mathbb{P}_\nu(S_1 > t, Z_1\in B_k|Z_0\in A)\right| \xrightarrow{p.s.} 0.$$

Approximation et estimation de f

On montre que, pour tout $0 < t < \inf_{x \in A} t^\star(x)$, on a

$$\sup_{0 \le s \le t} \left| \widehat{P}_n(A, B_k, s) - \mathbb{P}_\nu(S_1 > t, Z_1 \in B_k | Z_0 \in A) \right| \xrightarrow{p.s.} 0.$$

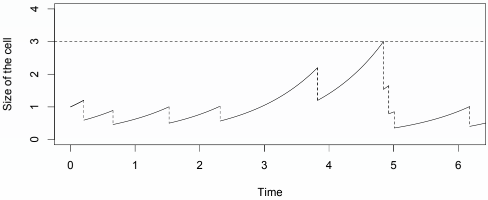
$\rightarrow$ Convergence (uniforme) en probabilité de $\widehat{f}_n(A, t)$ vers

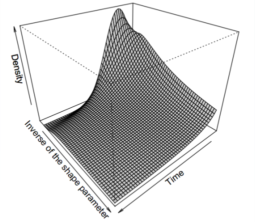
$$f(A, t) = \sum_k l(A, B_k, t) \mathbb{P}_\nu(Z_1 \in B_k, S_1 > t | Z_0 \in A),$$

qui est une approximation aussi précise que l'on veut de $f(x, t)$.

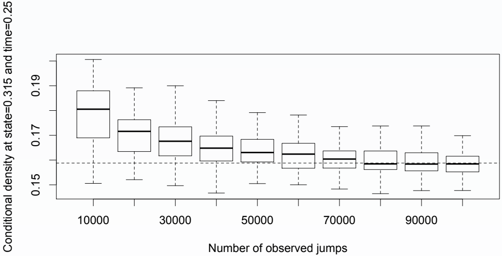
Simulations

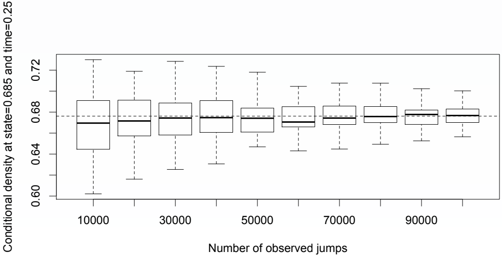
Évolution de la taille d'une cellule au cours du temps



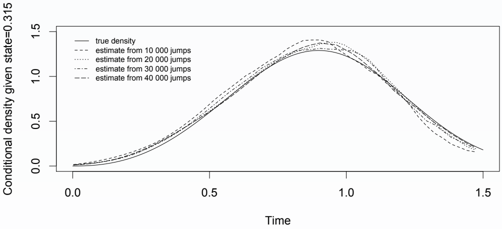


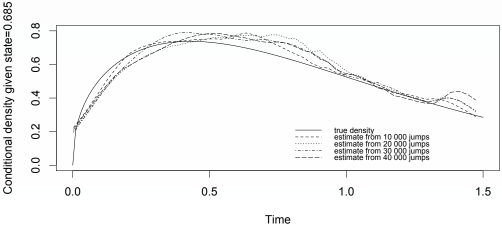
Simulations





Simulations





Plan de la soutenance

Stratégie

Estimer la loi de Z_n sachant $Z_n^- = \Phi_{Z_{n-1}}(S_n)$

Le noyau Q décrit la transition de la position juste avant le saut Z_n^- vers la position lors du saut Z_n,

$$Q(x, A) = \mathbb{P}(Z_n \in A | Z_n^- = x).$$

Stratégie

Estimer la loi de Z_n sachant $Z_n^- = \Phi_{Z_{n-1}}(S_n)$

Le noyau Q décrit la transition de la position juste avant le saut Z_n^- vers la position lors du saut Z_n,

$$Q(x, A) = \mathbb{P}(Z_n \in A | Z_n^- = x).$$

Cadre de travail

- PDMP défini sur un ouvert E de $\mathbb{R}^d$.
- Existence d'une densité, $Q(x, \mathrm{d}y) = q(x, y)\mathrm{d}y$.
- Estimation non paramétrique à partir d'une observation du processus en temps long.

Stratégie

Idée (comme pour estimer le noyau d'une chaîne de Markov)

Écrire $q(x,y)$ comme le rapport

$$\frac{\text{Loi invariante du couple } (Z_n^-, Z_n)}{\text{Loi invariante de } Z_n^-}.$$

Stratégie

Idée (comme pour estimer le noyau d'une chaîne de Markov)

Écrire $q(x,y)$ comme le rapport

$$\frac{\text{Loi invariante du couple } (Z_n^-, Z_n)}{\text{Loi invariante de } Z_n^-}.$$

Si on y parvient, un estimateur récursif naturel de $q(x,y)$ est

$$\widehat{q}_n(x,y) = \frac{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{w_j^{2d}} K\left(\frac{Z_j^- - x}{w_j^d}\right) K\left(\frac{Z_j - y}{w_j^d}\right)}{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{v_j^d} K\left(\frac{Z_j^- - x}{v_j}\right)}.$$

Estimation de la loi invariante de (Z_n^-)

Plusieurs difficultés apparaissent :

- L'espace d'état de (Z_n^-) est $\overline{E}$ (comportement à la frontière à distinguer).
- Existence et structure de sa loi invariante ?
- Le noyau $\mathcal{R}$ de (Z_n^-) n'est pas connu *a priori*.

Le dénominateur

Estimation de la loi invariante de (Z_n^-)

Plusieurs difficultés apparaissent :

- L'espace d'état de (Z_n^-) est $\overline{E}$ (comportement à la frontière à distinguer).
- Existence et structure de sa loi invariante ?
- Le noyau $\mathcal{R}$ de (Z_n^-) n'est pas connu *a priori*.

Condition de Doeblin $\rightarrow$ ergodicité de la chaîne (Z_n^-) et existence d'une unique mesure invariante π.

Le dénominateur

Sous des conditions sur le flot, le taux de saut, la frontière de E, on peut montrer que $\mathcal{R}$ admet une densité sur E,

$$\mathcal{R}(y,B) = \int_{B\cap E} r(y,z)\mathrm{d}z \; + \; \mathcal{R}(y, B\cap\partial E),$$

où $r(y,z) = \int_0^{-t^-(z)} q(y,\Phi_z(-s))f(\Phi_z(-s),s)D\Phi_z(-s)\mathrm{d}s$.

Le dénominateur

Sous des conditions sur le flot, le taux de saut, la frontière de E, on peut montrer que $\mathcal{R}$ admet une densité sur E,

$$\mathcal{R}(y, B) = \int_{B\cap E} r(y,z)\mathrm{d}z \ + \ \mathcal{R}(y, B\cap\partial E),$$

où $r(y,z) = \int_0^{-t^-(z)} q(y, \Phi_z(-s))f(\Phi_z(-s), s)D\Phi_z(-s)\mathrm{d}s$.

Conséquence immédiate : π admet une densité sur E,

$$\pi(B) = \int_{B\cap E} p(x)\mathrm{d}x \ + \ \pi(B\cap\partial E)$$

avec $p(x) = \int_{\overline{E}} \pi(\mathrm{d}y) r(y,x)$.

Le dénominateur

Hypothèses : K noyau borné à support borné et $v_j = v_1 j^{-\alpha}$.

On montre que, lorsque $0 < \alpha d < 1$,

$$\widehat{p}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{v_j^d} K\left(\frac{Z_j^- - x}{v_j}\right) \xrightarrow{p.s.} p(x).$$

Clés : existence d'une densité pour le noyau $\mathcal{R}$ et loi des grands nombres pour les martingales.

Le numérateur

Estimation de la loi invariante de (Z_n^-, Z_n)

- L'espace d'état de (Z_n^-, Z_n) est $\overline{E} \times E$.
- Le noyau de cette chaîne n'admet pas de densité sur E^2 :

  conditionnellement à Z_n, Z_{n+1}^- se trouve sur la courbe de $\mathbb{R}^d$ définie par le flot $\Phi_{Z_n}(t)$.
- La loi invariante de (Z_n^-, Z_n) est bien à densité sur E^2.

$\rightarrow$ technique plus universelle, mais aussi plus restrictive.

Le numérateur

Ergodicité de (Z_n^-) $\rightarrow$ ergodicité du couple (Z_n^-, Z_n), et sa loi invariante η est donnée par

$$\eta(A \times B) = \int_{A\times B} q(z,y)\, \pi(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y.$$

Densité de π sur E $\rightarrow$ densité de η sur E^2, et

$$\eta(A \times B) = \int_{A\times B} h(z,y)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y,$$

avec $h(z,y) = q(z,y)p(y)$.

Le numérateur

Hypothèses : K noyau borné à support borné et $w_j = w_1 j^{-\beta}$.

On montre que, lorsque $0 < 8\beta d < 1$,

$$\widehat{h}_n(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{w_j^{2d}} K\left(\frac{Z_j^- - x}{w_j^d}\right) K\left(\frac{Z_j - y}{w_j^d}\right) \xrightarrow{p.s.} h(x,y).$$

Clés : contrôle des covariances d'une chaîne de Markov, passage à la convergence presque sûre par le lemme de Van Ryzin.

Le numérateur

Hypothèses : K noyau borné à support borné et $w_j = w_1 j^{-\beta}$.

On montre que, lorsque $0 < 8\beta d < 1$,

$$\widehat{h}_n(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{w_j^{2d}} K\left(\frac{Z_j^- - x}{w_j^d}\right) K\left(\frac{Z_j - y}{w_j^d}\right) \xrightarrow{p.s.} h(x,y).$$

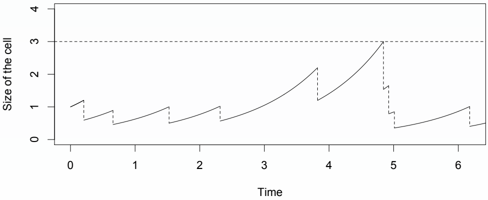
Clés : contrôle des covariances d'une chaîne de Markov, passage à la convergence presque sûre par le lemme de Van Ryzin.

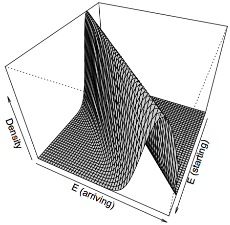
Finalement...

Lorsque $0 < \alpha d < 1$ et $0 < 8\beta d < 1$, si $p(x) > 0$,

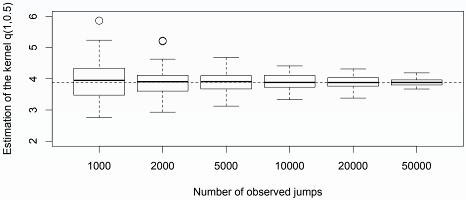
$$\widehat{q}_n(x,y) \xrightarrow{p.s.} q(x,y).$$

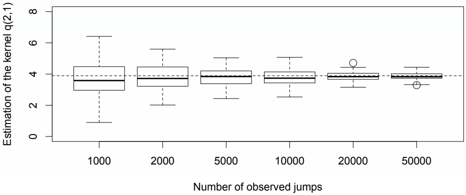
Évolution de la taille d'une cellule au cours du temps



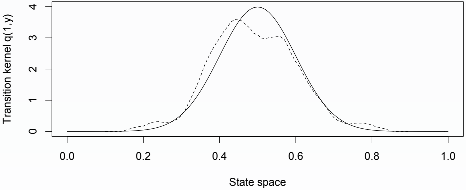


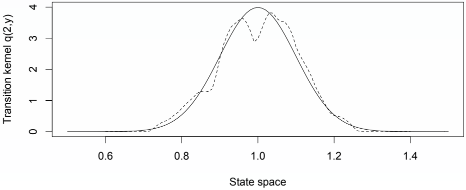
Simulations $\alpha = 0.125$ et $\beta = 0.1$



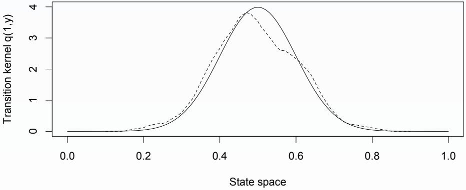


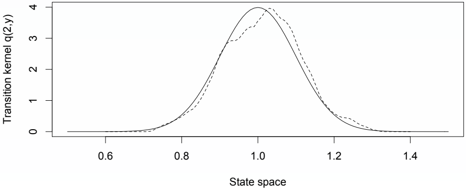
Simulations $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.1$ et $n = 5\,000$



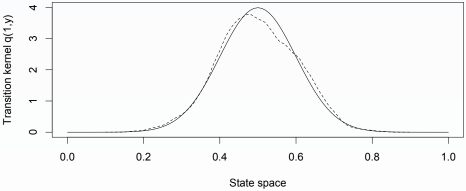


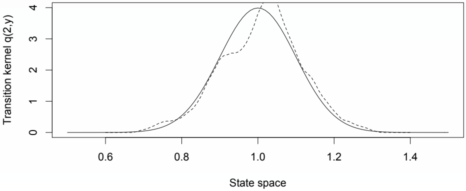
Simulations $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.1$ et $n = 10\,000$



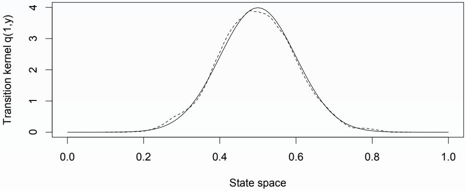


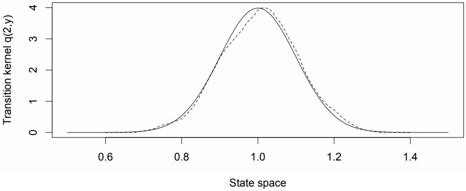
Simulations $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.1$ et $n = 20\,000$





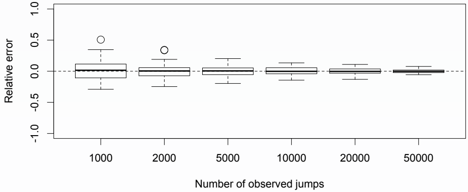
Simulations $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.1$ et $n = 50\,000$

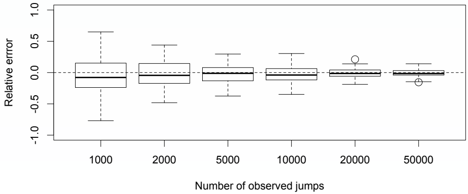




Simulations $\alpha = 0.125$ et $\beta = 0.1$

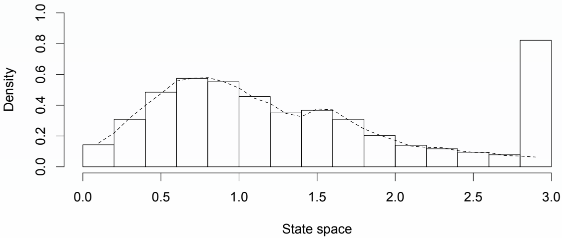
Erreurs relatives dans l'estimation de $q(x,y)$





Simulations $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.1$ et $n = 50\,000$

Estimation de la densité invariante p de (Z_n^-)



Plan de la soutenance

Estimation de la loi des temps inter-sauts

- Estimation non paramétrique et espace d'état très général.
- Ne nécessite pas de connaître la dynamique déterministe sous-jacente (seulement $t^\star$ ou une minoration judicieuse de $t^\star$).
- Convergence uniforme en probabilité sur tout compact.

Perspectives

- Vitesse de convergence, normalité asymptotique. Compléments
- Choix de la fenêtre de lissage. Compléments
- Compromis entre les erreurs statistique et déterministe. Compléments
- Estimation du taux λ.

Estimation du noyau de transition

- Estimation non paramétrique récursive pour un PDMP défini sur $\mathbb{R}^d$.
- Convergence ponctuelle presque sûre.
- Nécessite la connaissance de $\Phi_x(t)$ ou l'observation des Z_n^-.

Perspectives

- Vitesse de convergence, normalité asymptotique. ▸ Compléments
- Choix des paramètres α et β. ▸ Compléments
- Convergence uniforme.
- Alternative : estimation de la loi de Z_{n+1} sachant Z_n et S_{n+1}.

Merci de votre attention !

Vitesse de convergence, normalité asymptotique

$$\widehat{L}_n(A,t) - L_n^*(A,t) \;=\; \widetilde{M}_A^{(n)}(t) \;+\; a_n(t),$$

avec

$$a_n(t) = \int_0^t Y_n(A,s)^+ \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\lambda(Z_i,s) - l(A,s))\, \mathbb{1}_{\{Z_i \in A\}} \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \right] \mathrm{d}s.$$

Retour

Vitesse de convergence, normalité asymptotique

$$\widehat{L}_n(A,t) - L_n^*(A,t) \;=\; \widetilde{M}_A^{(n)}(t) \;+\; a_n(t),$$

avec

$$a_n(t) = \int_0^t Y_n(A,s)^+ \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\lambda(Z_i,s) - l(A,s)\right) \mathbb{1}_{\{Z_i \in A\}} \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}} \right] \mathrm{d}s.$$

Si $\sqrt{n}\Big(Y_n(A,t)^+ \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(Z_i,t)\mathbb{1}_{\{Z_i \in A\}}\mathbb{1}_{\{S_{i+1}\geq t\}} - l(A,t)\Big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, on peut montrer que

$$\sqrt{n}\;\left(\widehat{L}_n(A,t) - L(A,t)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \int_0^t \frac{l(A,s)}{\int_A G(z,s)\nu(\mathrm{d}z)} \mathrm{d}s\right).$$

Retour

Choix de la fenêtre de lissage

Une fenêtre (b_n) adéquate doit satisfaire

$$b_n^{-1}\left(\widehat{L}_n(A,t) - L_n^*(A,t)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Or,

$$\widehat{L}_n(A,t) - L_n^*(A,t) \;=\; \widetilde{M}_A^{(n)}(t) \;+\; a_n(t),$$

avec

$$a_n(t) = \int_0^t Y_n(A,s)^+ \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\lambda(Z_i,s) - l(A,s))\, \mathbb{1}_{\{Z_i \in A\}} \mathbb{1}_{\{S_{i+1} \geq s\}}\right] \mathrm{d}s.$$

▸ Retour

Compromis entre les erreurs statistique et déterministe

L'erreur d'estimation se décompose ainsi :

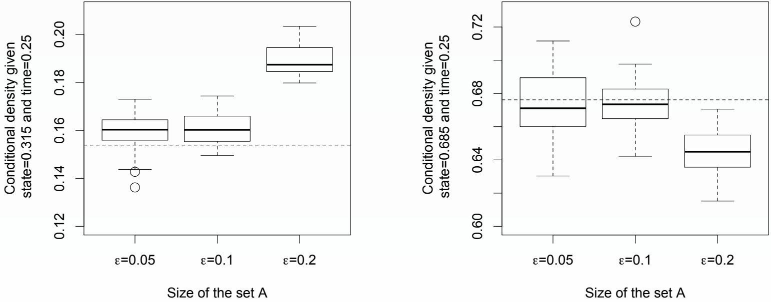
$$\widehat{L}_n(A,t) - \Lambda(x,t) = \underbrace{\widehat{L}_n(A,t) - L(A,t)}_{\text{erreur statistique}} + \underbrace{L(A,t) - \Lambda(x,t)}_{\text{erreur déterministe}}.$$

Lorsque $A \nearrow$,

- l'erreur statistique $\searrow$;
- l'erreur d'approximation $\nearrow$ (linéaire en $\operatorname{diam} A$).

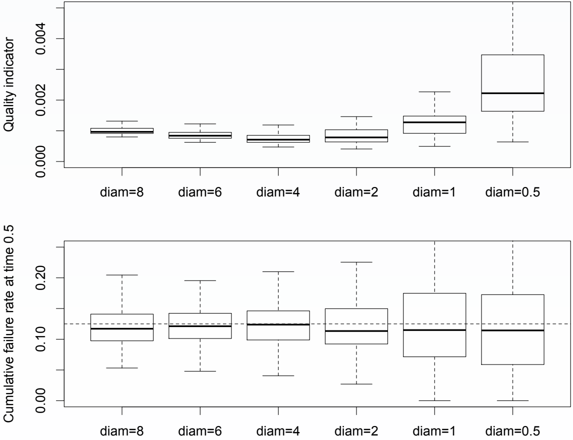
Retour

Compromis entre les erreurs statistique et déterministe



Retour

Compromis entre les erreurs statistique et déterministe



Retour

Vitesse de convergence, normalité asymptotique

$$\begin{aligned} n^\gamma \left(\widehat{q}_n(x,y) - q(x,y)\right) \\ = \tfrac{n^\gamma}{\widehat{p}_n(x)} \left(\widehat{h}_n(x,y) - h(x,y)\right) \; + \; \tfrac{n^\gamma q(x,y)}{\widehat{p}_n(x)} \left(\widehat{p}_n(x) - p(x)\right) \end{aligned}$$

Normalité asymptotique de $\widehat{p}_n(x)$

$$n^{(1-\alpha d)/2} \left(\widehat{p}_n(x) - p(x)\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\tau^2 p(x)}{1+\alpha d}\right),$$

pour $1/(2+d) < \alpha < 1/d$.

Clés : théorème central limite pour les martingales, hypothèse de type Lipschitz mixing.

Retour

Vitesse de convergence, normalité asymptotique

$$n^{(1-\alpha d)/2}\left(\widehat{h}_n(x,y) - h(x,y)\right) \xrightarrow{p.s.} 0,$$

pour $2(1-\alpha d) < 4\beta < \min\left(\frac{1}{2d}, \alpha - \frac{1}{2d}\right)$.

Retour

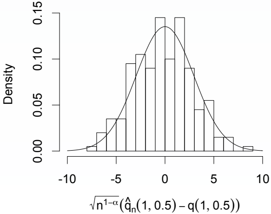
Vitesse de convergence, normalité asymptotique

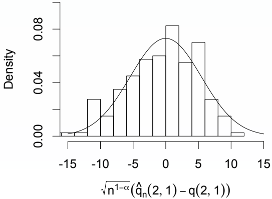
$$n^{(1-\alpha d)/2}\left(\widehat{h}_n(x,y)-h(x,y)\right)\xrightarrow{p.s.} 0,$$

pour $2(1-\alpha d)<4\beta<\min\left(\frac{1}{2d},\alpha-\frac{1}{2d}\right)$.

Normalité asymptotique de $\widehat{q}_n(x,y)$

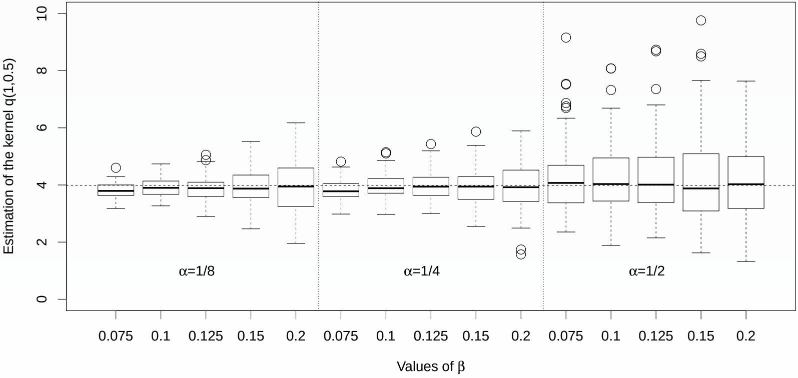
$$n^{(1-\alpha d)/2}\left(\widehat{q}_n(x,y)-q(x,y)\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}\left(0,\frac{q(x,y)^2\tau^2}{p(x)(1+\alpha d)}\right)$$





Retour

Choix des paramètres α et β $n = 10\,000$



Retour