Combinatoire Avancée

1 Problèmes (hongrois)

Exercice 1. 100 betyárs se retrouvent dans les plaines de Hortobágy. Chaque betyár a un champ de vision de 100 degrés. Chacun d'entre eux annonce le nombre d'autres betyárs qu'il voit. Ils calculent alors la somme de ces nombres. Quelle est la plus grande valeur que cette somme peut atteindre ?

Exercice 2. Soit $G = (V, E)$ un graphe à n sommets dessiné dans le plan. Si e est une arête de G, on note $x(e)$ le nombre d'arêtes qui intersectent e. Prouver que

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{x(e)+1} \leq 3n - 6$$

.

Exercice 3. Alíz et Béla jouent au jeu suivant : ils placent 2023 cailloux sur la table. Alíz commence par retirer 1 caillou. Ensuite, Béla peut enlever 1 ou 2 cailloux. Puis, Alíz peut enlever 1, 2, 3 ou 4 cailloux. Béla peut alors retirer entre 1 et 8 cailloux et ainsi de suite : au i-ème round, le joueur dont c'est le tour doit retirer entre 1 et 2^{i-1} cailloux. Le joueur qui retire le dernier caillou a gagné. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 4. Existe-t-il un graphe G cubique (tous les sommets ont degré 3) que l'on peut dessiner dans le plan de telle sorte que chaque arête soit un segment de longueur 1, et que deux arêtes ne se croisent jamais ? Si oui, donner un tel graphe G de taille minimale.

Exercice 5. Les cent mathématiciens participant à une conférence internationale de combinatoire sont tous logés dans le même hôtel. Le réceptionniste avait initialement prévu de les placer dans l'ordre de leur arrivée dans les chambres numérotées de 1 à 100. Mais il a oublié de donner cette instruction au premier arrivé, qui a donc choisi une chambre au hasard. Le réceptionniste a donc demandé à tous les autres clients de prendre la chambre portant le numéro correspondant à leur ordre d'arrivée, ou, si cette chambre est déjà prise, de choisir n'importe quelle autre chambre. Combien y a-t-il de dispositions possibles des clients dans les chambres ?

Exercice 6. Soit n un entier positif.

1. Soit D un graphe simple dirigé à n sommets. Déterminer le plus petit nombre de couleurs suffisantes pour colorer les arêtes de D sans créer de cycle (dirigé) monochromatique.

2. Déterminer le plus petit nombre de couleurs suffisantes pour colorer les arêtes de la clique (non orientée) de taille n sans créer de cycle monochromatique.

Exercice 7. Le jeu SET est un jeu de cartes. Chacune des cartes possède 4 attributs (sa couleur, sa forme, son nombre et son remplissage). Chaque attribut possède 3 valeurs possibles (il y a donc 81 cartes dans un paquet de SET). On dit que 3 cartes forment un SET si pour chacun des attributs, soit les 3 cartes ont la même valeur, soit elles ont des valeurs deux à deux différentes.

1. Combien y a-t-il de triplets de cartes qui forment un SET dans un paquet ?

2. Alíz et Béla se répartissent aléatoirement les cartes du paquet, Alíz prenant 41 cartes et Béla 40. Chacun d'entre eux compte le nombre de triplets de cartes qui forment un SET parmi leur cartes. Ils calculent ensuite la somme de leurs nombres. Quelles valeurs peut prendre cette somme ?

3. Quelle est la taille maximale d'un ensemble de cartes qui ne contient pas de triplet SET ?

Exercice 8. On considère un échiquier où une pièce est posée sur chaque case, côté PILE.

1. À chaque coup, on peut retourner (simultanément) 3 pièces adjacentes de n'importe quelle ligne ou colonne. Peut-on arriver à la configuration où toutes les pièces sont côté FACE ?
2. À chaque coup, on peut retourner (simultanément) toutes les pièces d'un carré 3×3. Peut-on arriver à n'importe quelle configuration de pièces ?
3. À chaque coup, on peut retourner (simultanément) toutes les pièces d'un carré 3×3 ou d'un carré 2×2. Peut-on arriver à n'importe quelle configuration de pièces ?
4. À chaque coup, on peut retourner (simultanément) toutes les pièces d'un carré 3×3 ou d'un carré 2×2 ou d'un carré 5×5. Peut-on arriver à n'importe quelle configuration de pièces ?

Exercice 9. Donnez un entier positif k et un arbre T tel que pour tout sous-graphe connexe F de T, le graphe $G - F$ (i.e. on enlève les sommets de F à T) a au moins 2023 composantes connexes.

Exercice 10. Quatorze personnes sont assises autour d'une table. Chacune d'entre elles porte une chemise bleue ou une chemise jaune. Quel est le nombre maximum possible de personnes ayant des voisins avec des chemises de couleur différente ?
Généraliser à un nombre arbitraire de personnes.

Exercice 11. Un directeur de prison convoque 7 prisonniers et leur propose un jeu. Chacun d'entre eux va recevoir un chapeau d'une certaine couleur. Il y a 7 couleurs possibles, et il se peut que plusieurs prisonniers reçoivent un chapeau de la même couleur. Une fois les chapeaux distribués, les prisonniers ne peuvent plus communiquer. Chaque prisonnier verra la couleur de tous les chapeaux sauf le sien. Puis, tous en même temps, il doivent dire une couleur. Si l'un d'eux devine la couleur de son chapeau, ils sont tous relâchés. Sinon, ils restent tous en prison. Les prisonniers peuvent-ils trouver une stratégie leur permettant de gagner à tous les coups ?

Exercice 12. Écrire tous les triplets de nombres entre 1 et 9 dont la somme vaut 15.
En représentant astucieusement ces triplets, montrer qu'il n'existe pas de stratégie gagnante au jeu suivant : 9 cartes sont posées sur la table, numérotées de 1 à 9. Alíz commence par prendre une carte. Puis, Béla prend une carte et ainsi de suite. Le premier des deux à avoir trois cartes dont la somme est 15 gagne. Y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs ?

Exercice 13. Soit $n \geq 2$. Soit G un graphe tel que chaque arête de G est dans au plus n cycles différents.

1. Montrer qu'on peut colorier les sommets de G avec $n+2$ couleurs de telle sorte que 2 sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.
2. Montrer qu'on peut colorier les sommets de G avec $n+1$ couleurs de telle sorte que 2 sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.

Exercice 14. Tous les jours, 8 amis se réunissent pour jouer à un jeu. Chaque jour, ils se répartissent en deux équipes de 4. Pour équilibrer les parties, ils veulent que chaque triplet de joueurs se retrouve dans la même équipe au moins un jour. En combien de jours au minimum peuvent-ils réussir cela ?

2 Ordres partiels

Exercice 15. Une *antichaîne* dans un ordre partiel est un ensemble de sommets deux à deux non comparables. Une *chaîne* dans un ordre partiel est un ensemble de sommets deux à deux comparables.

1. Soit P un ordre partiel. Montrer que la taille maximum d'une chaîne dans P est égale au nombre minimum d'antichaînes qui couvrent P.

2. En déduire que dans tout graphe orienté D, si le nombre maximum de sommets dans un chemin orienté de D est k, alors D est k-colorable. On pourra considérer un sous-graphe acyclique maximal que l'on transformera en ordre partiel.

Exercice 16. On note $\alpha(D)$ la taille d'un plus grand stable dans un graphe orienté (i.e. ensemble de sommets deux à deux non reliés).

1. Montrer que dans un graphe orienté $D = (V, A)$, on peut partitionner l'ensemble des sommets en $\alpha(D)$ chemins. On pourra considérer l'induction suivante sur k: si $P_1, \dots, P_k$ est un ensemble de chemins partitionnant V tel que $k > \alpha(G)$, alors il existe des chemins $P'_1, \dots, P'_{k-1}$ partitionnant V dont l'ensemble des sommets terminaux est inclus dans l'ensemble des sommets terminaux de $P_1, \dots, P_k$.

2. (Dilworth) Montrer que la taille maximum d'une antichaîne dans un ordre partiel P est égale au nombre minimum de chaînes qui couvrent P.

3. (Erdős-Szekeres) Montrer que de toute suite de n^2+1 nombres on peut extraire une sous-suite croissante ou une sous-suite décroissante de taille $n+1$.

4. Montrer que la taille maximale d'un couplage dans un graphe biparti G à n sommets est $n - \alpha(G)$, où $\alpha(G)$ est la taille maximale d'un stable de G.

5. Montrer que tout graphe biparti régulier (tous les sommets ont même degré non nul) possède un couplage parfait (couvrant tous les sommets)

6. Construire un graphe cubique (tous les sommets ont degré 3) qui n'a pas de couplage parfait.

Exercice 17. Inégalité LYM.

1. Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties de $[n]$ qui sont deux à deux non comparables (par inclusion) et on note a_k le nombre de parties de taille k dans $\mathcal{A}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

.

2. (Sperner) En déduire que toute antichaîne dans l'ordre partiel des parties de $[n]$ comparées par inclusion est de taille au plus $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$.

Exercice 18. Un *well-quasi-order* (wqo) est un ordre partiel qui n'admet ni antichaîne infinie ni suite infinie strictement décroissante.

1. (Dickson) Montrer que $\mathbb{N}^2$ est un wqo (avec $(i,j) \leq (k,l)$ si $i \leq k$ et $j \leq l$). Généraliser à $\mathbb{N}^d$.

2. * (Higman) On compare les mots sur l'alphabet $0, 1$ en posant $M \leqslant M'$ si M est un sous-mot de M' (pas forcément consécutif, par exemple $00 \leqslant 0110$). Montrer que $\leqslant$ est un wqo. Indication: supposer qu'il existe une antichaîne infinie comprenant un certain mot M, et exprimer les autres mots de l'antichaîne sachant qu'ils ne contiennent pas M.

3. Généraliser Higman pour un alphabet fini.

3 Méthode probabiliste

Exercice 19. Montrer que tout graphe G possède un ensemble stable de taille au moins $\displaystyle\sum_{v\in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$. On pourra tirer une permutation aléatoire des sommets.

Exercice 20. On suppose que n et k sont deux entiers tels que $n \geq 2k$.

1. Montrer que toute famille d'ensembles de taille k qui s'intersectent deux à deux a taille au plus $\binom{n-1}{k-1}$. On pourra tirer un ordre cyclique aléatoire.

2. Montrer que cette borne est atteignable.

3. Est-ce que l'inégalité est encore valide lorsque $n < 2k$?

Exercice 21. Lemme d'isolation. Montrer que si un hypergraphe $H = (V, E)$ à n sommets possède au moins une arête, et que l'on choisit aléatoirement un poids pour chaque sommet dans l'ensemble $[2n]$, alors avec probabilité au moins $1/2$, il existe une unique arête de poids maximal. On pourra borner la probabilité qu'un élément v fixé soit à la fois dans une arête de poids minimal et n'appartienne pas à une autre arête de poids minimal.

Exercice 22. Montrer que si on considère un sous-ensemble E de parties de taille $k > 1$ de $[n]$ avec $|E| \leq 2^{k-1}$, alors on peut trouver un sous-ensemble X de $[n]$ tel que pour tout $Y \in E$ on a à la fois $Y \cap X$ et $Y \setminus X$ non vides. Indication: on pourra commencer par supposer $|E| < 2^{k-1}$.