Sur un théorème de Cartier

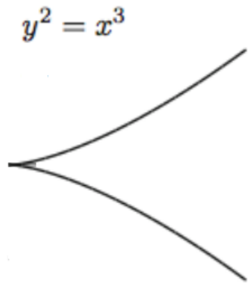
démontrant qu'en caractéristique nulle
les algèbres de Hopf sont réduites

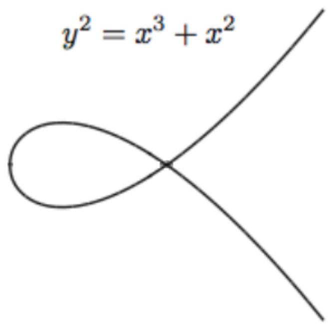
Salim Alloun

Je présente ici le chapitre 11 de **[1]**. Il sera question de différentielles et de leur utilité pour démontrer un théorème de Cartier qui assure qu'en caractéristique nulle les algèbres de Hopf sont réduites.
On interprète cela par la lissité du schéma en groupes associé.

1 Introduction

En français, un seul mot désigne deux choses en fait bien différentes. Les variétés (*manifolds* ou *Mannigfaltigkeiten*) ne sont pas les variétés (*varieties* ou *Varietäten*). Les premières sont toujours lisses, non au sens où elles seraient C^∞ mais au sens où elles n'ont pas de point singulier : tous les points admettent un voisinage du même type, c'est-à-dire une boule unité d'un espace euclidien. [1] Les secondes sont algébriques et peuvent présenter quelque point singulier :





Cependant, lorsque la variété a également une structure de groupe tous ses points ont une structure locale qui par translation est identique à celle au voisinage de l'élément neutre, et par une propriété fondamentale de la géométrie algébrique — traduite par le lemme de Krull — il ne peut y avoir de singularité en chaque point.

1. à condition qu'elles soient connexes et que donc la dimension est la même en chaque point...

Soit $\mathbf{G}$ un schéma en groupes affine sur un corps k. Nous verrons que montrer l'aspect lisse de $\mathbf{G}$ revient en fait à montrer la réductibilité géométrique de son algèbre de Hopf.

Rappels de géométrie algébrique.

L'idée de la géométrie algébrique moderne est de partir d'un anneau A et d'imaginer l'espace géométrique X sur lequel A est l'anneau des fonctions régulières sur X à valeurs dans des corps de constantes. Les propriétés de A refléteront les propriétés de X. En particulier les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de A sont les points de X et pour tout $f \in A$, l'image de f dans le corps $A/\mathfrak{m}$ est la valeur de f en $\mathfrak{m}$. On aimerait bien à voir comme en théorie des ensembles que $f = 0$ si et seulement si f est nulle en chaque point de X. Mais ce n'est pas tout le temps vrai. En effet, si f est nulle en chaque idéal maximal de A alors f est dans l'intersection des idéaux maximaux de A. Or on sait que

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\ \text{maximal}} \mathfrak{m} = \sqrt{(0)}$$

Ainsi l'obstruction provient du fait que A ait des nilpotents $\neq 0$. On dit que A est *régulier* si A n'a pas de nilpotent $\neq 0$. Cette approche peut se peaufiner puisqu'on peut également en un sens considérer la dérivée de f dans une direction donnée. Par récurrence, on obtient ainsi toutes les dérivées successives de f et cette fois-ci le lemme de Krull

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\ \text{maximal}} \bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n = \{0\}$$

permet de dire que f est nulle si et seulement si « f et toutes ses dérivées successives » s'annulent en chaque point de X.

2 Différentielles

Soient k un corps et A une k-algèbre.

Définition 2.1. *Une k-dérivation de A sur un A-module M est une application k-linéaire $D : A \longrightarrow M$ vérifiant la règle de Leibniz :*

$$D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

L'ensemble des k-dérivations de A sur M est noté $\mathrm{Der}_k(A, M)$.

Pour étudier les dérivations, il est préférable de disposer d'un A-module universel Ω muni d'une différentielle $\mathrm{d} : A \longrightarrow \Omega$ à partir duquel toutes les dérivations s'en déduisent.

Théorème 2.1. $\mathrm{Der}_k(A, -)$ *est un foncteur de la catégorie des A-modules dans la catégorie des ensembles, représentable par une paire* (Ω_A, d).

Si $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ alors Ω_A est un A-module libre de rang n dont une base canonique est $(\mathrm{d}(x_1), \ldots, \mathrm{d}(x_n))$ *(noté en pratique* $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$*).*

Si $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(f_i)_{i\in I}$ alors Ω_A est le quotient de $\Omega_{k[x_1,\ldots,x_n]}$ par les relations

$$\mathrm{d}f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0$$

Remarque 2.1. *On peut également définir l'ensemble des différentielles localement autour d'un point k-rationnel. À partir d'un point P représenté par un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A de corps résiduel $A/\mathfrak{m} = k$, on considère $\Omega_{A,P} := \Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m}$. De cette manière on retrouve exactement la notion d'espace tangent en $\mathfrak{m}$. En effet, il y a un isomorphisme avec le dual de l'espace tangent*

$$\Omega_A \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

En général on dispose de l'inégalité

$$\dim A \leqslant \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$$

et on dit que $\mathfrak{m}$ est un point singulier s'il n'y a pas égalité.

Exemples :

- *Considérons la courbe $y^2 = x^3$ sur $\mathbb{Q}$. Alors $A = \mathbb{Q}[x,y]/(y^2 - x^3)$ et*

$$\Omega_{A,(0,0)} \simeq \langle dx, dy | 3x^2 \mathrm{d}x = 2y \mathrm{d}y \rangle \otimes_A A/((x) + (y)) \simeq \langle dx, dy | 0 = 0 \rangle \simeq \langle dx, dy \rangle$$

  Le module des différentielles « globales » est A-libre de rang 1 mais celui des différentielles locales autour de $(0,0)$ est de dimension 2 et donc $(0,0)$ est un point singulier !
- *En caractéristique positive, le singularités peuvent même provenir directement du module des différentielles « globales ». Considérons le cercle $x^2 + y^2 = 1$ sur $\mathbb{F}_2$. Alors $A = \mathbb{F}_2[x,y]/(x^2 + y^2 - 1)$ et*

$$\Omega_A \simeq \langle dx, dy | 2x \mathrm{d}x = 2y \mathrm{d}y \rangle \simeq \langle dx, dy | 0 = 0 \rangle \simeq \langle dx, dy \rangle$$

  Dans ce cas-là le module des différentielles est un A-module libre de rang 2.

Maintenant $(A, \Delta, S, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf sur k représentant $\mathbf{G}$. La conséquence fondamentale sur Ω_A est que sa structure s'identifie à celle des différentielles locales en l'élément neutre translatée par la loi de groupe en chaque point de $\mathbf{G}$:

Théorème 2.2. *Soit I le noyau de $\varepsilon : A \longrightarrow k$, donc correspondant au neutre de $\mathbf{G}$ et appelé* idéal d'augmentation*; et la décomposition $A = k \oplus I$ en tant que k-espace vectoriel définit la projection (modulo I^2) $\pi : A \longrightarrow I/I^2$. Alors la différentielle est donnée par l'application $d : A \longrightarrow \Omega_A \simeq A \otimes_k I/I^2$ qui vérifie pour tout $a \in A$,*

$$\Delta(a) = \sum_{l=1}^{N} a_l \otimes b_l \qquad \Longrightarrow \qquad d(a) = \sum_{l=1}^{N} a_l \otimes \pi(b_l)$$

Corollaire 2.1. *Ω_A est un A-module libre.*

3 Théorème de Cartier

On dit que $\mathbf{G}$ est *lisse* si $\dim \mathbf{G} = \mathrm{rg}_k(\Omega_A)$.

Propriété 3.1. *$\mathbf{G}$ est lisse si et seulement si $A \otimes_k \overline{k}$ est réduite.*

Théorème 3.1. *Supposons que k est de caractéristique nulle. Alors A est réduite.*

Preuve. Supposons qu'il existe $y \in A$ nilpotent et $\neq 0$. Si $y^n = 0$ avec n minimal alors $y^{n-1} \neq 0$ et $(y^{n-1})^2 = y^n y^{n-2} = 0$. Quitte à prendre un autre y je peux donc supposer $y^2 = 0$.

A est une union d'algèbres de Hopf de type fini. Je peux donc quitte à changer A, supposer $y \in A$ de type fini. Je peux également supposer k algébriquement clos quitte à voir A incluse dans $A \otimes_k \overline{k}$[2].

Il en suit que Ω_A est de type fini sur A et d'après la **remarque 2.1** $I/I^2 \simeq \Omega_A \otimes_A A/I$ est de type fini sur A c'est-à-dire en fait de type fini sur k. Soient $x_1, \ldots, x_r \in I$ tels que

$$I/I^2 = \bigoplus_{i=1}^{r} (x_i \bmod I^2)$$

Il s'agit de construire la dérivation $D_i : A \longrightarrow A$ selon la direction donnée par x_i. La propriété universelle du **théorème 2.1** et de la description du **théorème 2.2** montre qu'il faut exhiber un morphisme $d_i : A \otimes_k I/I^2 \longrightarrow A$ qui par A-linéarité est déterminé par l'image de la base $(x_j \bmod I^2)_j$. Je choisis en fait le dual de cette base, c'est-à-dire $d_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Il en suit que pour tout $a \in A$ tel que $\Delta(a) = \sum a_l \otimes b_l$,

$$D_i(a) = \sum a_l \otimes d_i(b_l)$$

et la compatibilité entre ε et Δ donne que

$$\varepsilon(D_i(a)) = \sum \varepsilon(a_l) d_i(b_l) = d_i\left(\sum \varepsilon(a_l) b_l\right) = d_i(a)$$

En particulier quels que soient les indices i, j,

$$D_i(x_j) = \delta_{i,j} \bmod I^2 \qquad (\star)$$

Il s'agit maintenant de décrire les espaces d'ordres supérieurs :

Lemme 3.1. *La famille $H_n := (x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} \bmod I^{n+1})_{\sum m_i = n}$ est une base du k-espace vectoriel I^n/I^{n+1}. Autrement dit, I^n/I^{n+1} est isomorphe au k-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n à coefficients dans k.*

En effet, soit $(a_m)_{\sum m_i = n}$ une famille d'éléments de k telle que

$$\sum a_m x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} = 0 \bmod I^{n+1}$$

Alors, d'après la formule $(\star)$ et la règle de Leibniz, en appliquant $D_r^{m_r} \circ \cdots \circ D_1^{m_1}$ j'obtiens

$$a_m \cdot (m_1! \cdots m_r!) = 0$$

k est de caractéristique nulle donc les factorielles sont inversibles donc les a_m sont tous nuls. Il en suit que H_n est libre. À partir du fait que $(x_i \bmod I)$ est une base de I/I^2 on déduit directement que H_n est également génératrice de I^n/I^{n+1}.

2. On ne pourrait au pire qu'ajouter des nilpotents $\neq 0$ ...

Revenons à y. Il s'agit en utilisant le lemme de Krull (cf. *Introduction*) de démontrer que

$$y \in \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ maximal}} \bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n = \{0\}$$

Je montre d'abord que

$$y \in \bigcap_{n \geqslant 0} I^n \implies y \in \bigcap_{\mathfrak{m}} \bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n$$

Il s'agit de translater l'idéal I. Pour tout $g \in \mathbf{G}(k)$, c'est-à-dire $g : A \longrightarrow k$, à partir de la composition des deux flèches suivantes (donnant la translation par g)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \\ h & \longmapsto & (g, h) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & \mathbf{G} \\ (s, t) & \longmapsto & st \end{array}$$

on produit par dualité les flèches suivantes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend left, "T_g"] & A \otimes A \arrow[r, "g \otimes \mathrm{id}_A"] & k \otimes A \simeq A \end{tikzcd}$$

et naturellement $T_{g^{-1}}$ est l'inverse de T_g, où g^{-1} est défini par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] & k \\ A \arrow[u, "S"] \arrow[ur, "g^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

; finalement T_g envoie $\ker g$ sur I, d'où le résultat car k étant algébriquement clos et A de type fini tous les idéaux maximaux sont des noyaux de morphismes $A \longrightarrow k$.

Maintenant, je montre que $y \in \bigcap_{n \geqslant 0} I^n$. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors il existe N tel que $y \in I^N$ et $y \notin I^{N+1}$ (N est l'ordre d'annulation de y en $1_{\mathbf{G}}$). Je peux donc écrire $y = y_0 + y_1$, où y_0 est un polynôme homogène de degré N en les x_i et $y_1 \in I_{N+1}$. Il en suit que

$$y_0^2 = \underbrace{y^2}_{=0} - y_1^2 - 2y_0y_1 \in I_{2N+1}$$

Mais y_0^2 est un polynôme homogène de degré $2N$ en les x_i et donc $\neq 0 \mod I^{2N+1}$ d'après le **lemme 3.1** . *Contradiction.* □

Corollaire 3.1. *(Conclusion) Un schéma en groupes affine sur un corps de caractéristique nulle est lisse.*

Références.

[1] : Waterhouse, W. (1979). Introduction to affine group schemes (Graduate texts in mathematics 66).