ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Rapport de Stage de M2

Unités de Stark et valeurs spéciales de fonctions L attachées aux modules de Drinfeld

Résumé

L'objectif de ce rapport est de présenter ce que j'ai appris sur l'arithmétique des corps de fonctions, en particulier le calcul via la notion d'unité de Stark de certaines valeurs spéciales de fonctions L attachées aux modules de Drinfeld.

Salim Alloun
ÉNS de Lyon

Encadrant : Federico Pellarin
Université La Sapienza, Rome

du 3 avril 2023 au 28 juillet 2023

Sommaire

1 Introduction

Dans [1] Lenny Taelman démontre une formule (Théorème 4.8) pour certaines valeurs spéciales de fonctions L attachées aux modules de Drinfeld sur $\mathbb{F}_q[T]$, tout à fait analogue à la formule du nombre de classes donnant le résidu en 1 de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres. Rappelons que si K est un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers alors on définit la série

$$\zeta_K(s) := \sum_{0\neq I\subset\mathcal{O}_K} N_{K|\mathbb{Q}}(I)^{-s}$$

convergente pour $\Re s > 1$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un seul pôle en 1 ; ce pôle est simple et son résidu est usuellement donné par la formule

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\mathrm{Reg}_K h_K}{w_k\sqrt{|D_K|}}$$

où r_1 est le nombre de plongements réels de K, r_2 le nombre de plongements complexes à conjugaison près, Reg_K est le régulateur de K, h_K le nombre de classes de K, w_K le nombre de racines de l'unité dans K et D_K le discriminant de K. Cela peut se réécrire naturellement [1, Remark 6] à un facteur rationnel près comme un quotient de covolumes. Dans [2] Lenny Taelman avait défini le module des classes (Définition 4.6) et conjecturé pour le cas du module de Carlitz la formule dite de Taelman (Théorème 4.8), où l'équivalent du facteur rationnel est obtenu à partir du module des classes.

Les notions d'unités de Stark et de z-déformation, déjà indirectement utilisée par David Goss pour donner un sens aux valeurs de la fonction zêta de Carlitz aux entiers négatifs, a permis à Bruno Anglès, Tuan Ngo Dac et Floric Tavares Ribeiro dans [3] de donner une autre formule pour les valeurs spéciales considérées dans la formule de Lenny Taelman. Cette formule est également valide pour les modules d'Anderson admissibles — dans ce rapport on ne s'intéressera qu'aux modules de Drinfeld qui en constituent le cas particulier de dimension 1.

Le rapport s'organise comme suit :

- Une introduction à l'arithmétique des corps de fonctions en suivant l'analogie usuelle avec le cas classique de l'arithmétique sur les corps de nombres.
- Une présentation de la formule de Taelman [1].
- Une présentation de la formule de Anglès-Ngo Dac-Tavares Ribeiro [3] dans le cas des modules de Drinfeld, c'est-à-dire en suivant la démonstration de [4].

Notations

- Si S est un ensemble fini alors $\#S \in \mathbb{N}$ dénote son cardinal.
- Un espace topologique X est dit compact au sens anglo-saxon, c'est-à-dire si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut en extraire un sous-recouvrement fini.
- Si k est un corps et $a, b \in k[T]$, où T est une indéterminée, alors le résultant du couple (a, b) est noté $\mathrm{Res}(a, b)$. Pour la définition et les résultats, voir [5, IV, §].

2 L'arithmétique des corps de fonctions

L'arithmétique usuelle se construit à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$. Les corps étudiés sont les corps de nombres, extensions finies de $\mathbb{Q}$. Ils sont tous de caractéristique nulle. L'arithmétique des corps de fonctions se place dans le cas où la caractéristique des anneaux est un nombre premier $p > 0$.

Ainsi dans tout le texte, k est un corps fini de caractéristique p et de cardinal q. Si B est un anneau de caractéristique p alors on note $\tau : B \longrightarrow B\ b \mapsto b^q$ le morphisme de Frobenius.

L'anneau qui remplace $\mathbb{Z}$ est $A := k[T]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k. Comme $\mathbb{Z}$, c'est un anneau euclidien et donc en particulier principal. Notons $K := k(T)$ le corps des fractions de A. L'anneau A est muni d'une valuation $\mathrm{val}(a) = -\deg a$, qui s'étend à K et en fait un corps ultramétrique. Sa complétion est notée K_∞. En fait, il s'agit de $k((T^{-1}))$ les séries de Laurent en T^{-1} à coefficients dans k.

Quand on traite de divisibilité dans $\mathbb{Z}$, l'on se ramène toujours aux entiers positifs car ± 1 sont les seuls inversibles de $\mathbb{Z}$. De même $A^\times = k^\times$, et donc les "positifs" de A forment l'ensemble $A_+ := \{\text{polynômes unitaires } \neq 0\}$. Dans la même veine, posons $K_+ := \{a/b,\ a, b \in A_+\}$ et $K_{\infty,+}$ l'adhérence de K_+ dans K_∞, ces éléments sont dits *unitaires*. Enfin, A est euclidien donc factoriel, et ici les nombres premiers sont remplacés par les polynômes unitaires irréductibles formant l'ensemble noté $\mathcal{P} \subset A_+$.

On construit également l'équivalent de l'ensemble des nombres complexes. On note $\mathbb{C}_\infty$ le complété de K_∞^{sep} une clôture séparable de K_∞. D'après le théorème de Krasner, $\mathbb{C}_\infty$ est algébriquement clos [6, Proposition 4.4.2], et donc $\mathbb{C}_\infty$ est le plus petit corps complet (selon une valuation étendant celle de K) et algébriquement clos contenant K. Une différence importante est que $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ est de degré 2 alors que $\mathbb{C}_\infty|K_\infty$ est de degré infini.

Finalement, on note $|x| = q^{-\mathrm{val}(x)}$ pour tout x dans une extension de K dont la valuation prolonge celle de K.

Le tableau suivant met en correspondance les objets fondamentaux de l'arithmétique des corps de nombres et de l'arithmétique des corps de fonctions.

corps de nombres	corps de fonctions
$\mathbb{Z}$	A
$\{+1, -1\}$	$k^\times$
{nombres premiers}	$\mathcal{P}$
$\mathbb{Q}$	K
$\mathbb{R}$	K_∞
$\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}$	$A_+, K_+, K_{\infty,+}$
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}_\infty$
$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}\vert\mathbb{R})$	$\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{sep}}\vert K_\infty)$

Dans la suite pour comprendre l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions il est judicieux de lire les résultats en utilisant la correspondance donnée par le tableau. On a par exemple la proposition suivante :

Proposition 2.1. *A est un réseau de K_∞, c'est-à-dire un sous A-module discret et cocompact.*

Preuve. A est un sous-anneau de $K \subset K_\infty$, c'est donc un sous A-module de K_∞. Il est donc discret si et seulement si $\{0\}$ est un voisinage de 0 relativement à A. Or pour tout $a \in A\backslash\{0\}$, $\mathrm{val}(a) \leqslant 0$, et donc $\{0\} = A \cap \{x \in K_\infty, \mathrm{val}(x) > 0\}$. Finalement, la boule unité de K_∞ est compact car son corps résiduel est k qui est fini. Donc K_∞/A est compact en tant qu'image de la boule unité via l'application continue $K_\infty \longrightarrow K_\infty/A$. $\square$

Remarque 2.2. *K_∞/A est donc compact séparé. Il correspond ici à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$.*

Ici l'équivalent de la notion de cardinal d'un $\mathbb{Z}$-module fini se définit de la manière suivante :

Définition 2.3. *Soit M un A-module fini. C'est donc un k-espace vectoriel de dimension finie muni de l'endomorphisme $u := m \mapsto Tm$. Si χ_u est le polynôme caractéristique de u alors le "cardinal" de M est*

$$|M|_A := \chi_u(T) = \det{}_{k[\Theta]}(\Theta \mathrm{Id} - u|M)\big|_{\Theta=T} \in A_+$$

où Θ est une indéterminée.

Remarque 2.4. *Notons aussi que $\#M = q^{\dim_k(M)} = q^{\deg |M|_A}$.*

Lemme 2.5. *Soient M_1, M_2, M_3 des A-modules finis telle que la suite de A-modules suivante soit exacte*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

Alors $|M_1|_A |M_3|_A = |M_2|_A$.

Preuve. Le $k-$espace vectoriel M_2 est isomorphe à $M_3 \oplus M_1$ et la multiplication par T sur M_2 se décompose par blocs en la somme directe de celle sur M_3 et de celle sur M_1. Par conséquent

$$\det{}_{k[\Theta]}(\Theta \mathrm{Id} - u|M_3 \oplus M_1)\big|_{\Theta=T} = \det{}_{k[\Theta]}(\Theta \mathrm{Id} - u|M_3)\big|_{\Theta=T} \det{}_{k[\Theta]}(\Theta \mathrm{Id} - u|M_1)\big|_{\Theta=T}$$

□

Le module de Carlitz

Le foncteur groupe multiplicatif associe à un anneau R le groupe commutatif $R^\times$ des unités de R, il va donc de la catégorie des $\mathbb{Z}$-algèbres dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules. L'équivalent de ce foncteur est le **module de Carlitz**, qui à une A-algèbre R associe le A-module $C(R)$ défini par la nouvelle multiplication externe

$$C_T(r) := T \cdot r := Tr + \tau(r)$$

qui s'étend par k-linéarité en un morphisme de k-algèbre $a \mapsto C_a$, $A \longrightarrow \mathrm{End}_k(R)$.

On peut ainsi définir un analogue de la fonction indicatrice d'Euler φ qui à un entier $n \geqslant 1$ associe $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On pose : $\varphi : A_+ \longrightarrow A_+$ définie par

$$\varphi(a) = |C(A/(a))|_A$$

Proposition 2.6. *Soient $a \in A_+$ et $a = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{r_s}$ sa décomposition en produit de polynômes irréductibles unitaires. Alors*

$$\varphi(a) = \prod_i \mathfrak{p}_i^{r_i - 1}(\mathfrak{p}_i - 1) = a \prod_i (1 - 1/\mathfrak{p}_i)$$

Preuve. Cette démonstration reprend celle du cas a irréductible dans [1][Proposition 1].

En tant que A-modules, $A/(a) \simeq A/(\mathfrak{p}_1^{r_1}) \oplus \cdots \oplus A/(\mathfrak{p}_s^{r_s})$, donc en utilisant le lemme 2.5 il vient que

$$\varphi(a) = \varphi(\mathfrak{p}_1^{r_1}) \cdots \varphi(\mathfrak{p}_s^{r_s})$$

Traitons donc le cas $a = \mathfrak{p}^r$, où $r \geqslant 1$ et $\mathfrak{p}$ est un polynôme irréductible unitaire sur k, $\mathfrak{p} = \prod_{j\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(T-\alpha_j)$, où $\alpha_j \in \overline{k}$ une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Notons $\mathfrak{F}_\mathfrak{p} := A/(\mathfrak{p}) \simeq \mathbb{F}_{q^d}$. On obtient donc avec Θ une indéterminée que

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \det{}_{k[\Theta]}(\Theta\mathrm{Id} - C_T|A/(a))\big|_{\Theta=T}\\ &= \det{}_{k[\Theta]\otimes\overline{k}}(\Theta\mathrm{Id} - C_T|A/(a)\otimes\overline{k})\Big|_{\Theta=T}\\ &= \det{}_{\overline{k}[\Theta]}(\Theta\mathrm{Id} - C_T|\overline{k}[T]/(a))\Big|_{\Theta=T}\end{aligned}$$

Or $k[T]/(a) = \mathfrak{F}_\mathfrak{p}[\varepsilon]/(\varepsilon^r)$, où ε est une indéterminée, et donc via les d plongements de $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}$ dans $\overline{k}$ on obtient $\forall i \leqslant r-1$,

$$\mathfrak{F}_\mathfrak{p}\varepsilon^i \otimes \overline{k} \simeq \overline{k}\varepsilon_1^i \oplus \ldots \oplus \overline{k}\varepsilon_n^i$$

où $\varepsilon_j^r = 0$. Cette décomposition donne une base de diagonalisation pour la multiplication par T et τ est un endomorphisme cyclique sur $\mathfrak{F}_\mathfrak{p} \otimes \overline{k}$ (quitte à numéroter les α_j différemment je pose que c'est la permutation $j \mapsto j+1$), cela donne donc $\tau : \varepsilon_j^i \mapsto \varepsilon_{j+1}^{qi}$. Finalement, $\varphi(a)$ est le déterminant de la matrice par blocs de taille $r \times r$

$$\begin{pmatrix} D_0 & & & \\ \star & D & & \\ \star & \star & \ddots & \\ \star & \star & \star & D \end{pmatrix}$$

où

$$D_0 = \begin{pmatrix} T-\alpha_1 & & & -1 \\ -1 & T-\alpha_2 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & -1 & T-\alpha_d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} T-\alpha_1 & & & \\ & T-\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T-\alpha_d \end{pmatrix}$$

Finalement le résultat découle du fait que $\varphi(a) = |D_0|\mathfrak{p}^{r-1}$ et de

$$|D_0| = \mathfrak{p} - (-1)^{d-1}\begin{vmatrix} -1 & T-\alpha_2 & & -1 \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & T-\alpha_{d-1} \\ & & & -1 \end{vmatrix} = \mathfrak{p} - (-1)^{2(d-1)} = \mathfrak{p} - 1$$

□

Remarque 2.7. *Le résultat est démontré autrement dans [7, Theorem 2.7]. Il faut considérer C_a comme la "mise à la puissance a". En effet, si $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ alors $\varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}-1$ et donc par définition de $\varphi(\mathfrak{p}) = |C(\mathfrak{F}_\mathfrak{p})|_A$ on obtient les deux formulations*

$$C_{\mathfrak{p}-1} = 0 \mod \mathfrak{p} \qquad \textit{ou} \qquad C_\mathfrak{p} = \mathrm{Id} \mod \mathfrak{p}$$

correspondant pour le petit théorème de Fermat pour l premier aux formules

$$\forall n \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times, \qquad n^{l-1} = 1 \mod l \qquad \textit{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad n^l = n \mod l$$

Remarquons aussi qu'en fait on a démontré que si $\mathcal{F}$ est un corps fini muni d'une structure de A-module alors $|C(\mathcal{F})|_A = |\mathcal{F}|_A - 1$.

Remarque 2.8. *Les calculs ci-dessus montrent également que si $a \in A_+$ alors $|A/(a)|_A = a$, de la même manière que si $n \geqslant 0$ alors $\#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n$.*

3 Valeurs spéciales de fonctions L et modules de Drinfeld

On a en fait construit une fonction **multiplicative** sur A_+, c'est-à-dire que φ vérifie

$$a \wedge b = 1 \implies \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) .$$

On peut ainsi car A est factoriel, considérer l'analogue des fonctions arithmétiques et en particulier s'inspirer de la définition des fonctions de Dirichlet usuelles.

Soit $\psi : A_+ \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ n'importe quelle fonction. La valeur en un entier $s \geqslant 1$ de la série de Dirichlet associée est

$$L(\psi, s) := \sum_{a \in A_+} \psi(a) a^{-s}$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de degré borné, si pour a de degré assez grand $|\psi(a)| \leqslant |a|^N$ alors $\forall s > N$, $L(\psi, s)$ converge dans $\mathbb{C}_\infty$. En particulier

$$\zeta_A(s) := L(1, s) = \sum_{a \in A^+} a^{-s}$$

converge pour tout $s \geqslant 1$. De plus, on a la formule du produit eulérien :

Proposition 3.1. *Pour tout $s \geqslant 1$,*

$$\zeta_A(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} \left(1 - \mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1}$$

Lemme 3.2. *Soit (α_n) une suite d'éléments de $K_\infty \backslash \{-1\}$. Alors $\prod_n (1 + \alpha_n)$ converge si et seulement si $\alpha_n \longrightarrow 0$.*

Preuve. Si le produit converge alors le quotient des produits partiels tend vers 1, donc $1 + \alpha_n \longrightarrow 1$, d'où $\alpha_n \longrightarrow 0$. Réciproquement, si $\alpha_n \longrightarrow 0$ alors $1 + \alpha_n$ est à partir d'un certain rang de valuation nulle et donc la suite des produits partiels est de valuation bornée inférieurement par

$$v := \min_n \sum_{k \leqslant n} \operatorname{val}(1 + \alpha_n)$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{val}\left(\prod_{n \leqslant N+1} (1 + \alpha_n) - \prod_{n \leqslant N} (1 + \alpha_n)\right) &= \operatorname{val}\left((1 + \alpha_{N+1} - 1) \prod_{n \leqslant N} (1 + \alpha_n)\right) \\ &\geqslant \operatorname{val}(\alpha_{N+1}) + v \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

La suite des produits partiels est donc de Cauchy et finalement convergente dans K_∞. $\square$

Preuve. (de la proposition) Soit s un entier $\geqslant 1$. Premièrement, $1/\mathfrak{p}^s \longrightarrow 0$ quand le degré de $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ tend vers l'infini, et donc le produit est bien convergent d'après le lemme 3.2. Ensuite pour tout $\mathfrak{p}$, $\operatorname{val}(1/\mathfrak{p}^s) > 0$ et donc on peut écrire

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathfrak{p}^{-ns} = \left(1 - \mathfrak{p}^{-s}\right)^{-1}$$

Finalement, en utilisant le fait que A est factoriel on obtient que

$$\zeta_A(s) = \sum_{(n_\mathfrak{p}) \in \mathbb{N}^{(\mathcal{P})}} \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{-s n_\mathfrak{p}}$$

où chaque produit est à support multiplicatif fini. En sommant sur les $a \in A_+$ qui ne sont divisibles que par des ensembles finis d'irréductibles formant une suite croissante de réunion $\mathcal{P}$, on obtient la suite des produits partiels du produit initial. D'où l'égalité. $\square$

Ainsi à partir de $|C(\mathfrak{F}_\mathfrak{p})|_A = \mathfrak{p} - 1$ on obtient l'expression suivante

$$\zeta_A(1) = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}} \frac{|\mathfrak{F}_\mathfrak{p}|_A}{|C(\mathfrak{F}_\mathfrak{p})|_A}$$

On peut prendre cette expression comme une définition de valeurs spéciales en généralisant le module de Carlitz et en prenant d'autres anneaux que A.

Modules de Drinfeld

Fixons pour la suite du texte R la clôture intégrale de A dans une extension finie de K, et notons pour $\mathfrak{m}$ idéal maximal de R, $\mathfrak{F}_\mathfrak{m} := R/\mathfrak{m}$. Rappelons que si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de R alors $\deg \mathfrak{m} := \deg |\mathfrak{F}_\mathfrak{m}|_A$ est le degré de l'extension finie $\mathfrak{F}_\mathfrak{m}|k$.[1] On retrouve bien pour $R = A$ le degré d'un polynôme irréductible, en identifiant l'élément $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ avec l'idéal premier $(\mathfrak{p}) \subset A$.

Définition 3.3. *Un **module de Drinfeld** (sur A) à coefficients dans R est un foncteur E tel que si B est une R-algèbre alors $E(B)$ est le groupe abélien B muni d'une structure de A-module définie par la multiplication par T (puis étendue par k-linéarité) qu'est l'endomorphisme*

$$E_T(r) = Tr + r_1\tau(r) + \ldots + r_n\tau^n(r)$$

où $r_i \in R$, et $r_n \neq 0$. Dans ce cas, l'entier n est appelé le rang de E. Comme pour le module de Carlitz, on note $a \mapsto E_a$, $A \longrightarrow \mathrm{End}_k(R)$, le morphisme de k-algèbres associé.

*On appelle **facteur local** de E en un idéal I de R l'élément noté*

$$Z_I(E|R) := \frac{|R/I|_A}{|E(R/I)|_A}$$

quantité bien définie car R/I est un k-espace vectoriel de dimension finie, et le fait que $|R/I|_A$ et $|E(R/I)|_A$ sont des polynômes unitaires de même degré implique que $Z_I(E|R) \in 1 + T^{-1}k[[T^{-1}]]$.

Remarque 3.4. *Le module de Carlitz est un module de Drinfeld de rang 1. Remarquons qu'on a en particulier démontré dans la proposition 2.6 que pour tout entier $n \geqslant 1$, $Z_{I^n}(C|A) = Z_I(C|A)$. Ceci est vrai en fait quel que soit le module de Drinfeld [3, Lemma 3.2].*

Exemple 3.5. *Considérons les modules de Drinfeld de rang $\leqslant 1$. Pour cela, notons $\mathscr{C}^{(b)}$ le module de Drinfeld à coefficients dans A défini par $\mathscr{C}^{(b)}_T(r) := Tr + b\tau(r)$, où $b = \mu(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_l) \in A$ et $\lambda_i \in \overline{k}$ une clôture algébrique de k . Alors en reprenant les calculs matriciels de la preuve de la proposition 2.6 on obtient que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ tel que $\mathfrak{p} = (T-\alpha_1)\cdots(T-\alpha_d)$,*

$$\begin{aligned} |\mathscr{C}^{(b)}(\mathfrak{F}_\mathfrak{p})|_A &= \mathfrak{p} - b(\alpha_1)\cdots b(\alpha_d) \\ &= \mathfrak{p} - \mathrm{Res}(\mathfrak{p}, b) \\ &= \mathfrak{p} - (-1)^{dl}\mathrm{Res}(b, \mathfrak{p}) \\ &= \mathfrak{p} - (-1)^{dl}\mu^d\mathfrak{p}(\lambda_1)\cdots\mathfrak{p}(\lambda_l) \end{aligned}$$

et donc on a les expressions suivantes :

$$L(\mathscr{C}^{(b)}|A) = \sum_{a\in A_+} \frac{a(\lambda_1)\cdots a(\lambda_l)}{a}((-1)^l\mu)^{\deg a}$$

et, car $a \wedge b = 1 \iff \mathrm{Res}(a,b) \neq 0$,

$$L(\mathscr{C}^{(b)}|A) = \prod_{\mathfrak{p}\wedge b=1}(1 - \mathrm{Res}(\mathfrak{p}, b)\mathfrak{p}^{-1})^{-1} = \sum_{a\wedge b=1} \mathrm{Res}(a,b)/a$$

1. Les corps résiduels d'une algèbre de type fini sur k sont des k-espace vectoriels de dimension finie d'après le lemme de Zariski.

Définition 3.6. *Soit E un module de Drinfeld à coefficients dans R. Par analogie avec ζ_A, on définit*

$$L(E|R) := \prod_{\mathfrak{m}} Z_{\mathfrak{m}}(E|R) = \prod_{\mathfrak{m}} \frac{|\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A}{|E(\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}})|_A}$$

où $\mathfrak{m}$ parcourt les idéaux maximaux de R, et en notant $\chi_E(\mathfrak{m}) := |\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A - |E(\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}})|_A$ on peut écrire

$$L(E|R) = \prod_{\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{\chi_E(\mathfrak{m})}{|\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A}\right)^{-1}$$

Proposition 3.7. *Soit E un module de Drinfeld à coefficients dans R. Alors $L(E|R)$ converge vers un élément de $1 + T^{-1}k[[T^{-1}]]$.*

Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.8. *[8, Theorem 1.4.3] Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R, notons $\mathfrak{p}$ le noyau de $A \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$ (on dit que $\mathfrak{m}$ est au-dessus de $\mathfrak{p}$ via $\mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$) et $i(\mathfrak{m}|\mathfrak{p}) := \deg \mathfrak{m}/\deg \mathfrak{p}$ le degré d'inertie. Alors*

$$|\chi_E(\mathfrak{m})| \leqslant |\mathfrak{p}|^{i(\mathfrak{m}|\mathfrak{p})(1-1/n)}$$

Preuve. (de la proposition.) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ au dessus de $\mathfrak{p}$, $|\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A = \mathfrak{p}^{i(\mathfrak{m}|\mathfrak{p})}$. En effet, par définition on a $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} = A/\mathfrak{p} \hookrightarrow R/\mathfrak{m} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, or $\mathfrak{p} = |\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}|_A$ est irréductible et donc $\mathfrak{p}$ est le polynôme minimal sur k de la multiplication par T ; on en déduit que $|\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A = \mathfrak{p}^i$, où $i \geqslant 0$. Finalement l'égalité $\deg |\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A = i \deg \mathfrak{p}$ conclut.

D'après le lemme 3.8 on obtient que

$$|\ \chi_E(\mathfrak{m})/|\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}|_A\ | \leqslant \frac{|\mathfrak{p}|^{(1-1/n)i(\mathfrak{m}|\mathfrak{p})}}{|\mathfrak{p}|^{i(\mathfrak{m}|\mathfrak{p})}} \leqslant \underbrace{|\mathfrak{p}|}_{<1}{}^{-1/n} \underset{\deg \mathfrak{p} \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme il y a au plus $[\mathrm{Frac}(R) : K]$ idéaux au-dessus de $\mathfrak{p}$ on peut utiliser le lemme 3.2 pour dire que $L(E|R)$ converge vers un élément de $1 + T^{-1}k[[T^{-1}]]$. □

Remarque 3.9. *Dans le tableau des analogies, on peut également faire correspondre aux courbes elliptiques les modules de Drinfeld de rang 2 (analogie introduite par Vladimir Drinfeld dans [9]). En effet, il est à noter que $L(E|R)$ est tout à fait analogue au produit infini suivant, où on note $\mathscr{E} := \{y^2 = x^3 + bx^2 + cx + d\}$ $(b, c, d \in \mathbb{Z})$ le schéma affine associé à une équation de Weierstrass,*

$$\prod_{p \text{ premier}} \frac{p}{\#\mathscr{E}(\mathbb{F}_p)}$$

qui est, via l'étude de la croissance du produit partiel quand p croît indéfiniment, à l'origine de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer [10]. Par ailleurs notons $a_p := p - \#\mathscr{E}(\mathbb{F}_p)$, l'inégalité de Hasse assure que $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$. De manière analogue, dans le cas d'un module de Drinfeld E de rang 2 à coefficients dans $R = A$, pour tout $\mathfrak{p}$, $|\chi_E(\mathfrak{p})| \leqslant |\mathfrak{p}|^{1-1/2} = \sqrt{|\mathfrak{p}|}$. De la même manière que l'inégalité de Hasse est une conséquence de l'hypothèse de Riemann sur les courbes démontrée par André Weil, dans [8] on démontre l'inégalité du lemme 3.8 par un semblant d'hypothèse de Riemann dans le cas des corps de fonctions.

4 La formule des classes de Taelman

Comme $L := \mathrm{Frac}(R)$ est une extension finie de K, elle est munie de la valuation canonique qui prolonge celle de K. Le complété de L selon cette valuation est noté L_∞. On a en fait l'isomorphisme $L_\infty \simeq R \otimes_A K_\infty$, et donc L_∞ est une extension finie de K_∞. La valuation de L_∞ est donc obtenue canoniquement en prolongeant celle de K_∞.

Dans la suite Θ est une indéterminée. Lorsqu'elle existe, on appelle **rayon de convergence** d'une série formelle $\sum_{i\geqslant 0} a_i\Theta^i \in \mathbb{C}_\infty[[\Theta]]$ la borne supérieure des $r \geqslant 0$ tels que $|a_i|r^i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si ρ est le rayon de convergence de la série alors pour tout $x \in \mathbb{C}_\infty$ tel que $|x| < \rho$, $\sum_i a_i x^i$ est convergente.

Lemme 4.1. *Soit $(a_i)_{i\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_\infty$ telle qu'il existe $d > 0$ et $c, v \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{val}(a_i) \geqslant (di + c)q^i + v$ à partir d'un certain rang. Alors le rayon de convergence de $\sum a_i\Theta^{q^i}$ est infini.*

Preuve. Soit $r > 0$. Alors $|a_i|r^{q^i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ découle du fait que pour i assez grand

$$\log_q(|a_i|r^{q^i}) = -\mathrm{val}(a_i) + rq^i \leqslant q^i(r - di - c) - v \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

□

Proposition 4.2. *Il existe une unique série formelle*

$$\exp_E(\Theta) = \Theta + e_1\Theta^q + e_2\Theta^{q^2} + \ldots \in \mathbb{C}_\infty[[\Theta]]$$

telle que

$$\exp_E(T\Theta) = E_T(\exp_E(\Theta)) \tag{1}$$

De plus, ses coefficients e_i sont des éléments de $R \otimes_A K \hookrightarrow L$, elle est de rayon de convergence infinie et induit un morphisme de A-modules

$$\exp_E : L_\infty \longrightarrow E(L_\infty)$$

Preuve. Supposons qu'une telle série existe et vérifie (1). Notons $e_0 := 1$ et $e_i := 0$ si $i < 0$. Alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} e_i T^{q^i}\Theta^{q^i} = T \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e_i\Theta^{q^i} + \sum_{j=1}^{n} r_j \sum_{i=0}^{\infty} e_i^{q^j}\Theta^{q^{i+j}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(Te_i + \sum_{j=1}^{n} r_j e_{i-j}^{q^j}\right)\Theta^{q^i}$$

Il en découle que pour tout $i > 0$,

$$e_i = \frac{1}{T^{q^i} - T}(r_1 e_{i-1}^q + r_2 e_{i-2}^{q^2} + \ldots + r_n e_{i-n}^{q^n})$$

Ainsi la suite (e_i) est entièrement déterminée par récurrence. Réciproquement, (e_i) définie ainsi vérifie (1) qui est l'égalité qui transcrit exactement le fait que $\exp_E$ soit un morphisme de A-modules entre L_∞ et $E(L_\infty)$. Il reste à voir que $\exp_E$ est bien convergente sur tout L_∞.

Pour tout j, soit $v \leqslant 0$ le minimum des $\mathrm{val}(r_j)$. Alors

$$\mathrm{val}(e_i) \geqslant \deg(T^{q^i} - T) + \min_{1\leqslant j\leqslant n}(\mathrm{val}(e_{i-j})q^j) + v$$

ce qui avec $\alpha_i := (\mathrm{val}(e_i) - v)/q^i$ se réécrit

$$\alpha_i \geqslant 1 + v/q^i + \min_{1\leqslant j\leqslant n}(\alpha_{i-j})$$

Pour i assez grand, $-1/2 < v/q^i \leqslant 0$, et donc quitte à renuméroter les indices on peut supposer que pour tout i,

$$\alpha_i \geqslant \frac{1}{2} + \min_{1\leqslant j\leqslant n}(\alpha_{i-j})$$

Il en découle par récurrence que $\alpha_i \geqslant i/2n + c - \frac{1}{2}$, où $c := \min_{1\leqslant j\leqslant n} \alpha_j$. On conclut avec le lemme 4.1.

□

Remarque 4.3. *Notons* $\log_E$ *la série formelle réciproque de* $\exp_E$*. Alors pour tout* $a \in A$*,*

$$\exp_E(a\log_E(\Theta)) = E_a(\exp_E(\log_E(\Theta))) = E_a(\Theta)$$

En particulier pour le module de Carlitz C on comprend bien pourquoi C_a correspondait dans la remarque 2.7 à la "mise à la puissance a".

Soit V un $K_\infty-$espace vectoriel de dimension finie d. Soient deux réseaux Λ_1, Λ_2 de V. Il existe un automorphisme σ de V tel que $\sigma(\Lambda_1) = \Lambda_2$, on note $[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A \in K_\infty$ l'unitaire dans $K_{\infty,+}$ associé à $\det \sigma$. Ce choix ne dépend pas de σ. En effet un autre tel automorphisme est obtenu à partir de σ par la composition d'un élément de $GL_d(A)$ dont le déterminant est un inversible de A, c'est-à-dire un élément de $k^\times$.

Proposition 4.4.

(i) Si Λ_3 est un autre réseau de V alors

$$[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A[\Lambda_2 : \Lambda_3]_A = [\Lambda_1 : \Lambda_3]_A$$

(ii) Si Λ_3 est un autre réseau de V et $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \Lambda_3$ alors les Λ_3/Λ_i sont des A-modules finis et

$$[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A = \frac{|\Lambda_3/\Lambda_2|_A}{|\Lambda_3/\Lambda_1|_A}$$

Preuve. (i) découle de la multiplicativité du déterminant.

Si on démontre (ii) pour le cas $\Lambda_1 = \Lambda_3$ alors (i) implique (ii) en toute généralité. Supposons donc que $\Lambda_2 \subset \Lambda_1 = \Lambda_3$. Comme $|\Lambda_1/\Lambda_1|_A = |0|_A = 1$, il faut montrer que Λ_1/Λ_2 est fini et que $[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A = |\Lambda_1/\Lambda_2|_A$. Soit σ un automorphisme de V tel que $\sigma(\Lambda_1) = \Lambda_2$, et notons Σ la matrice de cet automorphisme dans une base de V donnée par une base de Λ_1 en tant que $A-$module libre. $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ donc $\Sigma \in M_d(A)$. La forme normale de Smith de Σ est une matrice diagonale D telle que $\Sigma = SDT$, où $S, T \in GL_d(A)$ et où il existe $a_1, \dots, a_d \in A\backslash\{0\}$ tels que

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_d \end{pmatrix}$$

Il en suit que $\Lambda_1/\Lambda_2 \simeq A/(a_1)\oplus\cdots\oplus A/(a_d)$ (qui est fini car les a_i sont $\neq 0$) et comme $\det S, \det T \in k^\times$ on obtient que

$$\frac{\det \sigma}{a_1 \cdots a_d} \in k^\times$$

c'est-à-dire que $[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A = |A/(a_1)|_A \cdots |A/(a_d)|_A = |\Lambda_1/\Lambda_2|_A$. □

Remarque 4.5. *Lenny Taelman suggère [1, Remarks 8 & 14] que muni d'une mesure de Haar à valeurs dans K_∞, l'élément $[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A$ correspondrait aux ratio des covolumes des réseaux, autrement dit on pourrait écrire*

$$[\Lambda_1 : \Lambda_2]_A = \frac{|V/\Lambda_2|_A}{|V/\Lambda_1|_A}$$

où $|M|_A$ serait défini comme le volume de tout A-module compact et coïncidant avec le cas M fini.

Définition 4.6. $\exp_E$ *est un morphisme de* $A-$*modules et donc on peut définir le* ***module des classes*** *comme le* A*-module quotient*

$$H(E|R) := \frac{E(L_\infty)}{E(R) + \exp_E(K_\infty)}$$

De même on peut définir le ***module des unités*** *comme le* A*-module image réciproque*

$$U(E|R) := \exp_E^{-1}(E(R)) \subset L_\infty$$

Proposition 4.7. $U(E|R)$ *est un réseau de* L_∞ *et* $H(E|R)$ *est fini.*

Preuve. $\exp_E$ est une application ouverte [11, 2.2]. Par conséquent, elle induit un plongement de $L_\infty/U(E|R)$ dans $E(L_\infty)/E(R)$. L'image de ce plongement est en particulier un fermé de $E(L_\infty)/E(R)$. Or R est un A-module de type fini, donc $E(L_\infty)/E(R)$ est l'image par une application continue d'un produit fini de copies de K_∞/A qui est compact et séparé d'après la proposition 2.1. Donc $E(L_\infty)/E(R)$ est compact et séparé. □

L_∞ est un $K_\infty-$espace vectoriel de dimension finie, on peut donc considérer la grandeur $[R : U(E|R)]_A$ et obtenir la formule suivante.

Théorème 4.8. *(Formule des classes de Taelman [1])*

$$L(E|R) = [R : U(E|R)]_A \cdot |H(E|R)|_A$$

On en déduit un résultat de Carlitz déjà connu en 1935 [12] :

Corollaire 4.9. *En notant* $[i] := T^{q^i} - T$*,*

$$L(C|A) = \zeta_A(1) = \log_C(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{[1][2]\cdots[i]}$$

Preuve. À partir de $\log_C(T\Theta) + \log_C(\Theta^q) = T\log_C(\Theta)$ on en déduit comme pour $\exp_C$ les coefficients de $\log_C$ qui a donc un rayon de convergence $\geqslant 1$. En particulier, $\log_C(1)$ est bien défini.

Soit $\alpha \in K_\infty$. On voit immédiatement que si $\alpha \in K_{\infty,+}$ alors $[A : A\alpha]_A = \alpha$. Or ici $L_\infty = K_\infty$ est de dimension 1 en tant que $K_\infty-$espace vectoriel et donc $U(C|A) = A\log_C(1)$. $\log_C(1)$ est unitaire donc $[A : U(C|A)]_A = \log_C(1)$.

Finalement, $L(C|A)$ et $\log_C(1)$ sont de valuation nulle, et $|H(C|A)|_A$ est de valuation négative. Donc $|H(C|A)|_A = 1$ et donc $L(C|A) = \log_C(1)$. □

On a montré en particulier que $H(C|A) = 0$. Avec des calculs similaires si $b \in A$ est un polynôme de degré $< q$ alors, avec les notations de l'exemple 3.1, $\log_{\mathscr{C}^{(b)}}(1)$ est bien défini et de valuation nulle donc

$$L(\mathscr{C}^{(b)}|A) = \log_{\mathscr{C}^{(b)}}(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{[1][2]\cdots[i]} b^{\frac{q^i-1}{q-1}}$$

En particulier si $\lambda \in k$ alors $\lambda^{\frac{q^i-1}{q-1}} = \lambda^{1+q+\cdots+q^{i-1}} = \lambda^i$ et donc

Proposition 4.10.

$$L(\mathscr{C}^{(\lambda)}|A) = \sum_{a\in A_+} \frac{\lambda^{\deg a}}{a} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{[1]\cdots[i]}\lambda^i$$

5 Unités de Stark

La formule du théorème 4.8 a été généralisée, mais surtout simplifiée, par les auteurs de [3], grâce à la notion d'unités de Stark. Leur formule s'applique aux modules d'Anderson. Ici on se restreint au cas des modules de Drinfeld sur A.

Commençons par voir sur un exemple fondamental la pertinence de la notion de z-déformation. Pour cela, traitons le cas des valeurs aux entiers négatifs de ζ_A. Remarquons que les valeurs $\zeta_A(-s)$ donnent lieu à des séries divergentes, pour tout entier $s \geqslant 0$. Il est plus convenable en fait de regrouper les termes par leur degré, en partant d'une indéterminée z on note donc pour tout entier s,

$$\widetilde{\zeta_A}(s) := \sum_{a \in A_+} a^{-s} z^{\deg a}$$

Proposition 5.1. *[13, 8.12.] Pour tout entier $s \geqslant 0$, $\widetilde{\zeta_A}(-s) \in A[[z]]$ est en fait un polynôme en z de degré $< \log_q(s+1)$.*

Ainsi, pour $s \geqslant 0$ on peut raisonnablement définir

$$\zeta_A(-s) := \widetilde{\zeta_A}(-s)\Big|_{z=1} \in A$$

Similairement la proposition 4.10 suggère qu'en fait $\widetilde{\zeta_A}(1)$ s'exprime comme une z-déformation de $\log_C(1)$. D'où cette idée d'introduire $\widetilde{E}$ une z-déformation d'un module de Drinfeld E, puis d'évaluer en $z = 1$ pour obtenir une formule pour $L(E|R)$.

Définition 5.2. *Soit E un module de Drinfeld sur A de rang n et à coefficients r_i dans R. On note $\widetilde{E}$, appelé module de Drinfeld z-déformé, le foncteur tel que si B est une R-algèbre alors $\widetilde{E}(\mathbb{T}_z(B))$ est le groupe abélien $\mathbb{T}_z(B)$ muni d'une structure de $A[z]$-module. Cette dernière est obtenue par $k[z]$-linéarité à partir d'une structure de A-module donnée par la multiplication par T qu'est l'endomorphisme sur B (étendue par k-linéarité)*

$$\forall r \in B, \widetilde{E}_T(r) := Tr + zr_1\tau(r) + \ldots + z^n r_n \tau^n(r)$$

Si B est un anneau valué complet alors on note $\mathbb{T}_z(B)$ l'algèbre de Tate complétée de $B[z]$ selon sa norme de Gauss de rayon 1, notée $||\cdot||$, c'est-à-dire

$$\mathbb{T}_z(B) := \left\{ \sum_{i \geqslant 0} b_i z^i \ , \ b_i \in B \ , \ b_i \longrightarrow 0 \right\} \quad \textit{et} \quad \left\| \sum b_i z^i \right\| := \max_i |b_i|$$

Remarquons que si B est discret alors $\mathbb{T}_z(B) = B[z]$.

Proposition 5.3. *Notons $\exp_{\widetilde{E}}$ la série formelle définie par*

$$\exp_{\widetilde{E}}(\Theta) = \Theta + e_1 z \Theta^q + e_2 z^2 \Theta^{q^2} + \ldots$$

Alors elle vérifie

$$\exp_{\widetilde{E}}(T\Theta) = \widetilde{E}_T(\exp_{\widetilde{E}}(\Theta))$$

et est de rayon de convergence infini et induit donc un morphisme de $A[z]$-modules $\mathbb{T}_z(L_\infty) \longrightarrow \widetilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))$.

Preuve. On a vu précédemment que le rayon de convergence de $\exp_E$ est infini. Pour tout i, $||e_i z^i|| = |e_i|$ et on en déduit en utilisant un lemme analogue au lemme 4.1 que $\exp_{\widetilde{E}}$ est de rayon de convergence infini. À partir la formule de récurrence de la proposition 4.2, on obtient que

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_T(\exp_{\widetilde{E}}(\Theta)) &= T\sum_{i=0}^{\infty} e_i\Theta^{q^i}z^i + \sum_{j=1}^{n} r_j z^j \sum_{i=0}^{\infty} e_i^{q^j}\Theta^{q^{i+j}}z^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(Te_i z^i + \sum_{j=1}^{n} r_j z^j z^{i-j} e_{i-j}^{q^j}\right)\Theta^{q^i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} e_i T^{q^i} z^i \Theta^{q^i} \\
&= \exp_{\widetilde{E}}(T\Theta)
\end{aligned}$$

□

Définition 5.4. *On note* $\mathrm{ev} := \mathrm{ev}_1 : \mathbb{T}_z(L_\infty) \longrightarrow L_\infty$ *l'application d'évaluation en* $z = 1$*, et on note*

$$U(\widetilde{E}|\mathbb{T}_z(R)) := \exp_{\widetilde{E}}^{-1}(\mathbb{T}_z(R)) \subset \mathbb{T}_z(L_\infty)$$

$$H(\widetilde{E}|\mathbb{T}_z(R)) := \frac{\widetilde{E}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}{\widetilde{E}(\mathbb{T}_z(R)) + \exp_{\widetilde{E}}(\mathbb{T}_z(L_\infty))}$$

et finalement le ***module des unités de Stark***

$$U_{\mathrm{St}}(E|R) := \mathrm{ev}(U(\widetilde{E}|\mathbb{T}_z(R))) \subset L_\infty$$

Pour facilité la lecture, on remplace dans la suite $\mathbb{T}_z(R)$ par $R[z]$. Remarquons que $U_{\mathrm{St}}(E|R)$ est un sous-A-module de $U(E|R)$. En effet, si $\widetilde{x} \in U(\widetilde{E}|R[z])$ alors

$$\exp_E(\mathrm{ev}(\widetilde{x})) = \mathrm{ev}(\underbrace{\exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{x})}_{\in R[z]}) \in R$$

Remarque 5.5. *Pour tout* $\lambda \in k$*, la formule de la proposition 4.10 se réécrit*

$$\widetilde{\zeta}_A(1)\Big|_{z=\lambda} \quad = \quad \log_{\widetilde{C}}(1)\Big|_{z=\lambda}$$

où $\log_{\widetilde{C}} = \sum l_i z^i \Theta^{q^i}$ *si* $\log_C = \sum l_i \Theta^{q^i}$.

Lemme 5.6. *Posons* $H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]$ *le* R*-module des éléments de* $(z-1)$*-torsion de* $H(\widetilde{E}|R[z])$*, et*

$$\begin{array}{cccc}
\Psi : & L_\infty & \longrightarrow & \mathbb{T}_z(L_\infty) \\
& x & \longmapsto & \dfrac{\exp_{\widetilde{E}}(x) - \exp_E(x)}{z-1}
\end{array}$$

Alors Ψ *est bien définie et induit un isomorphisme de* A*-modules*

$$U(E|R)/U_{\mathrm{St}}(E|R) \simeq H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]$$

Preuve. Le noyau de ev est $(z-1)\mathbb{T}_z(L_\infty)$. Or pour tout $x \in L_\infty$, $\mathrm{ev}(\exp_{\widetilde{E}}(x)) = \exp_E(x)$ donc $(\exp_{\widetilde{E}}(x) - \exp_E(x))/(z-1) \in \mathbb{T}_z(L_\infty)$. Donc Ψ est bien définie. Si de plus $x \in U(E|R)$ alors $\exp_E(x) \in R \subset R[z]$ et donc

$$(z-1)\Psi(x) = \exp_{\widetilde{E}}(x) - \exp_E(x) = 0 \ \text{ dans } \ H(\widetilde{E}|R[z])$$

Montrons que Ψ induit sur $U(E|R) \to H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]$ un morphisme de A-modules surjectif.

– Soit $x \in U(E|R)$. Alors

$$\begin{aligned}\Psi(Tx) &= \frac{\widetilde{E}_T(\exp_{\widetilde{E}}(Tx)) - \widetilde{E}_T(\exp_E(Tx))}{z-1} + \frac{\widetilde{E}_T(\exp_E(Tx)) - \exp_E(Tx)}{z-1} \\ &= \widetilde{E}_T(\Psi(x)) + \sum_{j=1}^{n} r_j \underbrace{\frac{z^j - 1}{z-1}}_{\in R[z]} \underbrace{\exp_E(x)^{q^j}}_{\in R}\end{aligned}$$

Donc $\Psi(Tx) = \widetilde{E}_T(\Psi(x))$ dans $H(\widetilde{E}|R[z])$. Comme Ψ est k-linéaire, on a prouvé que Ψ est un morphisme de A-modules.

– Soit $\widetilde{y} \in \mathbb{T}_z(L_\infty)$ représentant une classe de $H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]$. Alors $(z-1)\widetilde{y} = \exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{u}) + \widetilde{v}$, où $\widetilde{u} = u + (z-1)\mu \in \mathbb{T}_z(L_\infty)$ et $\widetilde{v} = v + (z-1)\nu \in R[z]$. En appliquant ev on obtient que $0 = \exp_E(u) + v$ et donc $u \in U(E|R)$. Enfin

$$\begin{aligned}\Psi(u) - \widetilde{y} &= \frac{\exp_{\widetilde{E}}(u) - \exp_E(u)}{z-1} - \widetilde{y} \\ &= \frac{\exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{u} - (z-1)\mu) + v}{z-1} - \frac{\exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{u}) + \widetilde{v}}{z-1} \\ &= -\exp_{\widetilde{E}}(\mu) - \nu = 0 \quad \text{dans } H(\widetilde{E}|R[z])\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que $\ker(\,U(E|R) \to H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]\,) = U_{\mathrm{St}}(E|R)$.

– Soit $x \in U(E|R)$ tel que $\Psi(x) = 0$. Alors il existe $\widetilde{u} \in \mathbb{T}_z(L_\infty)$ et $\widetilde{v} \in R[z]$ tels que

$$\exp_{\widetilde{E}}(x) - \exp_E(x) = (z-1)\exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{u}) + (z-1)\widetilde{v} = \exp_{\widetilde{E}}((z-1)\widetilde{u}) + (z-1)\widetilde{v}$$

Il en suit que $x \in U_{\mathrm{St}}(E|R)$, car $x = \mathrm{ev}(x - (z-1)\widetilde{u})$ et

$$\exp_{\widetilde{E}}(x - (z-1)\widetilde{u}) = \exp_E(x) + (z-1)\widetilde{v} \ \in R[z]$$

– Soit $x \in U_{\mathrm{St}}(E|R)$. Alors il existe $\widetilde{x} \in \mathbb{T}_z(L_\infty)$ tel que $x = \mathrm{ev}(\widetilde{x})$, c'est-à-dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{T}_z(L_\infty)$ tel que $\widetilde{x} = x + (z-1)\xi$, et $\exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{x}) \in R[z]$. On en déduit que

$$\Psi(x) = \frac{\exp_{\widetilde{E}}(x) - \exp_E(x)}{z-1} = \underbrace{\frac{\exp_{\widetilde{E}}(\widetilde{x}) - \exp_E(x)}{z-1}}_{\in R[z]} + \exp_{\widetilde{E}}(\xi) = 0 \quad \text{dans } H(\widetilde{E}|R[z])$$

□

Lemme 5.7. *$U_{\mathrm{St}}(E|R)$ est d'indice fini dans $U(E|R)$ et*

$$|U(E|R)/U_{\mathrm{St}}(E|R)|_A = |H(E|R)|_A$$

Preuve. En utilisant le lemme 5.6, il reste à montrer que $H(\widetilde{E}|R[z])$ est fini (voir [4, 7.4.1]) et que $|H(E|R)|_A = |H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]|_A$.

On a deux suites exactes de A-modules finis :

$$0 \longrightarrow (z-1)H(\widetilde{E}|R[z]) \longrightarrow H(\widetilde{E}|R[z]) \xrightarrow{\mathrm{ev}} H(E|R) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H(\widetilde{E}|R[z])[z-1] \longrightarrow H(\widetilde{E}|R[z]) \xrightarrow{\times(z-1)} (z-1)H(\widetilde{E}|R[z]) \longrightarrow 0$$

Il en découle d'après le lemme 2.5 que

$$|H(E|R)|_A = \frac{|H(\widetilde{E}|R[z])|_A}{|(z-1)H(\widetilde{E}|R[z])|_A} = |H(\widetilde{E}|R[z])[z-1]|_A$$

□

En particulier le module des unités de Stark est un réseau de L_∞ et donc on obtient pour $L(E|R)$ une formule plus simple :

Théorème 5.8. *(Anglès-Ngo Dac-Tavares Ribeiro, [3])*

$$L(E|R) = [R : U_{\mathrm{St}}(E|R)]_A$$

Preuve. En utilisant les propriétés de la proposition 4.4, la formule découle directement du théorème 4.8 et du lemme 5.7 :

$$\begin{aligned} L(E|R) &= [R : U(E|R)]_A |H(E|R)|_A \\ &= [R : U(E|R)]_A |U(E|R)/U_{\mathrm{St}}(E|R)|_A \\ &= [R : U(E|R)]_A [U(E|R) : U_{\mathrm{St}}(E|R)]_A = [R : U_{\mathrm{St}}(E|R)]_A \end{aligned}$$

□

6 Conclusion

Il n'existe pas de théorie générale pour interpréter les valeurs spéciales de fonctions L. On a ici étudié un cas particulier qui en caractéristique non nulle correspond à une notion de volume que l'on retrouvait déjà en caractéristique nulle.

Remerciements

J'aimerais remercier Federico Pellarin pour l'accueil qu'il m'a réservé et son aide durant le stage. Je remercie également son étudiant en thèse Giacomo Hermes Ferraro pour les réponses qu'il a apportées à mes questions. À Rome j'ai pu assister au 7^{th} *mini symposium* de la *Roman Number Theory Association* (4 au 6 mars 2023) ainsi qu'au *Arithmetic Day* (17 mai 2023) qui a lieu à La Sapienza (https ://sites.google.com/uniroma1.it/an-arithmetic-day/home-page).

Références

[1] Lenny Taelman. Special L-values of Drinfeld modules. *Annals of Mathematics*, (1).

[2] Lenny Taelman. A Dirichlet unit Theorem for Drinfeld modules. *Mathematische Annalen*, 2010.

[3] Anglès Bruno, Tavares Ribeiro Floric, and Tuan Ngo Dac. A class formula for admissible Anderson modules. *Inventiones Mathematicae*, (229).

[4] Floric Tavares Ribeiro. On the Stark Units of Drinfeld Modules in Arithmetic and Geometry over Local Fields : VIASM 2018. *Springer*, 2021.

[5] Serge Lang. Algebra. *Springer*, 2002.

[6] Gilles Christol. équations différentielles p-adiques, Applications aux sommes exponentielles. 1994.

[7] Nguyen Ngoc Dong Quan. Some basic results in elementary number theory in function fields. *Journal of Number Theory*, (159).

[8] Igor Potemine. Arithmétique des corps globaux de fonctions et géométrie des schémas modulaires de drinfeld. *Thèse de doctorat dirigée par Alexis Pantchichkine (Université Joseph Fourier, Grenoble)*, 1997.

[9] Vladimir Drinfeld. Elliptic Modules. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1974.

[10] Peter Swinnerton-Dyer. An application of computing to class field theory. *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton.*

[11] Jun-Ichi Igusa. An introduction to the theory of local Zeta functions. *AMS/IP studies in advanced mathematics*, 2000.

[12] Leonard Carlitz. On certain functions connected with polynomials in a Galois field. *Duke Mathematical Journal*, 1, 1935.

[13] David Goss. Basic structures of function field arithmetic. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, (3. Folge 35), 1996.