

RAPPORT DE STAGE DE PLR N°1

La représentation cohomologique des automorphismes d'un dessin d'enfant

Résumé

Afin d'étudier l'action galoisienne sur les dessins d'enfants, on introduit $\mathcal{P}_{(l)}$ le foncteur « module de Parker l -adique » défini sur \mathcal{D} la catégorie des dessins combinatoires. Si F_2 désigne le groupe libre à deux générateurs alors on montre que c'est un $\text{Aut}(\widehat{F}_2)$ -foncteur faible pour l'action canonique de $\text{Aut}(\widehat{F}_2)$ sur \mathcal{D} , dans laquelle se plonge l'action usuelle de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$. On montre une décomposition de $\mathcal{P}_{(l)}$ via une suite exacte. Finalement, on effleure un lien potentiel entre d'une part la décomposition ARC du module de Parker vu comme représentation cohomologique des automorphismes d'un dessin, et d'autre part les trois corps de modules qu'on associe à un dessin.

SALIM ALLOUN
ÉNS de Lyon

Encadrante : LEILA SCHNEPS
Institut de Mathématiques de
Jussieu-Paris Rive Gauche, Paris

du 2 octobre 2023 au 8 mars 2024

SOMMAIRE

1	Introduction	3
2	Actions de groupes sur une catégorie	4
3	La représentation cohomologique des automorphismes d'un dessin	6
3.1	Les trois catégories enfantines	6
3.2	Le module de Parker	7
4	L'action pseudo-galoisienne de $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$	9
4.1	Sur les dessins	9
4.2	Sur le module de Parker l -adique	10
4.3	Fidélité de la représentation des automorphismes	12
5	Vers la tour ARC	14
5.1	La tour des corps de modules	14
5.2	La décomposition ARC du module de Parker	15
6	Quelques exemples	19
6.1	Les arbres	19
6.2	Les dessins cycliques	20
7	Conclusion	21

Remerciements

J'aimerais remercier Leila Schneps pour l'accueil (resp. la confiance, l'aide) qu'elle m'a réservé (resp. manifestée, procurée) durant le stage. De même je remercie Benjamin Enriquez pour son exigence épistémique qui m'a été très fructueuse. Je remercie également tous les doctorants et toutes les doctorantes du couloir 15-16, mais également ceux de l'IRMA qui m'ont fort bien accueilli, et bien sûr salue l'aide de Simone Nivodsky qui, malgré sa retraite à Lasserre, a su puiser de son précieux temps pour clarifier à la fois les énoncés et les preuves.

À Paris j'ai pu assister au colloque en l'honneur de Jacques TITS au Collège de France, et au séminaire Bourbaki de novembre 2023. Enfin, à l'ICTS-TIFR de Bangalore en Inde, j'ai participé au *workshop Grothendieck-Teichmüller Theory*, notamment en y donnant un exposé [0].

Notations

- Si A est un ensemble fini alors $\#A$ est le cardinal de A , et \mathfrak{S}_A est le groupe des permutations de A .
- Le groupe symétrique d'indice d , noté \mathfrak{S}_d , est le groupe $\mathfrak{S}_{\{1, \dots, d\}}$.
- $\pi_1 := \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}) = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$, où on prend x un lacet autour de 0, y autour de 1 et z autour de ∞ .
- Si G agit sur un ensemble A alors A^g dénote l'ensemble des invariants par g , et A^G les invariants par G .
- Si $H \subset G$ alors $Z(G)$ est le **centre** de G , sous-groupe du **centralisateur** de H dans G

$$\text{Cent}_G(H) := \{g \in G \mid \forall h \in H, ghg^{-1} = h\}$$

lui-même sous-groupe du **normalisateur** de H dans G

$$\text{Norm}_G(H) := \{g \in G \mid \forall h \in H, ghg^{-1} \in H\}$$

- Si X est un espace topologique alors X^{cc} est l'ensemble de ses composantes connexes.

1 Introduction

Étant donnée une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} , la théorie de Grothendieck-Teichmüller se donne pour objectif de produire une description combinatoire de $G_{\mathbb{Q}} := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ via ses actions sur différents espaces géométriques. Dans ce qui suit, on appelle simplement *courbe* toute courbe projective lisse définie sur un corps.

La théorie des dessins d'enfants consiste à considérer le schéma $\mathbb{P}_*^1 := \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ sur $\text{Spec } \mathbb{Q}$ et la suite exacte étale associée en passant à $\overline{\mathbb{Q}}$ donnant lieu à un morphisme canonique

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Out}(\widehat{\pi}_1)$$

où $\widehat{\pi}_1$ est le complété profini du groupe libre à deux générateurs noté

$$\pi_1 := \pi_{1,\text{top}}(\mathbb{P}_*^1(\mathbb{C})) = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$$

x, y, z étant des lacets respectivement autour de 0, 1 et ∞ . En choisissant un point base tangential, on peut relever le morphisme canonique en une action donnée par un morphisme $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$. Il se trouve que cette action de $G_{\mathbb{Q}}$ est fidèle [1]. Drinfel'd a introduit [2] le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{\mathbf{GT}}$, défini comme un sous-groupe de $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ contenant l'image de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$. Le plongement $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{GT}}$ est conjecturalement un isomorphisme.

Le choix de \mathbb{P}_*^1 est motivé par le théorème de Belyi [10] qui assure que toute courbe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ peut se réaliser comme un revêtement fini de \mathbb{P}^1 , étale sur \mathbb{P}_*^1 . Par ailleurs un tel revêtement, appelé fonction de Belyi, a priori défini sur \mathbb{C} est en fait toujours définissable sur $\overline{\mathbb{Q}}$. (*Par conséquent dans la suite même si cela n'est pas précisé toutes les courbes sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*) On a ainsi un foncteur oubli surjectif

$$B := \{\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1, \text{ revêtements finis de courbes de } \mathbb{P}^1, \text{ étales sur } \mathbb{P}_*^1\} \longrightarrow C := \{\text{courbes } \mathcal{C}\}$$

$G_{\mathbb{Q}}$ agit donc sur la catégorie B, et en passant par la catégorie équivalente D des ensembles finis muni d'une action transitive de π_1 , dont les objets sont appelés dessins combinatoires, les deux actions de $G_{\mathbb{Q}}$ définies se déduisent l'une de l'autre [3]. En outre D est équivalente à la catégorie des dessins d'enfants dont les objets s'expriment en termes de graphes bipartites plongés dans une surface orientable compacte. Le point de vue adopté sera de favoriser la catégorie combinatoire D, dont les objets sont implémentables sur ordinateur.

Inspiré par la conjecture de Parker [5], qui se propose d'exprimer le corps de modules d'un dessin donné avec ses automorphismes, on définit pour tout nombre premier l le module de Parker l -adique $\mathcal{P}_{(l)}$ qui est un foncteur de D vers $\mathbb{Z}_l\text{-Mod}_{\text{aut}}$ la catégorie des \mathbb{Z}_l -modules donnés avec un groupe d'automorphismes \mathbb{Z}_l -linéaires. Après avoir rappelé les définitions associées à une action de groupe sur une catégorie, on montre de plus qu'en composant par le foncteur oubli $\mathbb{Z}_l\text{-Mod}_{\text{aut}} \longrightarrow \mathbb{Z}_l\text{-Mod}$ c'est un $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ -foncteur faible pour des actions strictes.

2 Actions de groupes sur une catégorie

On rappelle ici les notions d'actions de groupe sur une catégorie comme présentées dans [6]. Dans la suite Γ est un groupe d'élément neutre 1, et la concaténation des foncteurs est notée multiplicativement.

Définition 1. Soit \mathcal{C} une catégorie. Une Γ -action sur \mathcal{C} est la donnée de

- pour tout $\gamma \in \Gamma$, une équivalence de catégories $\rho_\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,
- quels que soient $\gamma, \sigma \in \Gamma$, une équivalence naturelle de foncteurs

$$\phi_{\gamma,\sigma} : \rho_{\gamma\sigma} \xrightarrow{\cong} \rho_\gamma \rho_\sigma$$

satisfaisant la commutativité des diagrammes d'associativité :

$$\begin{array}{ccc} \rho_\gamma \rho_\sigma \rho_\lambda & \xrightarrow{\phi_{\sigma,\lambda}} & \rho_\gamma \rho_{\sigma\lambda} \\ \phi_{\gamma,\sigma} \Downarrow & & \Downarrow \phi_{\gamma,\sigma\lambda} \\ \rho_{\gamma\sigma} \rho_\lambda & \xrightarrow{\phi_{\sigma\gamma,\lambda}} & \rho_{\gamma\sigma\lambda} \end{array}$$

On dit que l'action est **stricte** si les $\phi_{\gamma,\lambda}$ sont tous égaux à la transformation naturelle identité.

Exemple 1. Les morphismes identité définissent l'action triviale de Γ .

Définition 2. Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories munies respectivement de Γ -actions ρ et ρ' . Un Γ -foncteur faible de \mathcal{C} dans \mathcal{D} est un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ muni pour tout $\gamma \in \Gamma$, d'une équivalence naturelle

$$\gamma_{*,\mathcal{F}} : \rho_\gamma \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \rho'_\gamma$$

telles que les deux équivalences naturelles $\rho_\gamma \rho_\sigma \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F} \rho'_{\gamma\sigma}$ coïncident dans le diagramme pentagonal suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & \rho_{\gamma\sigma} \mathcal{F} & & \\ & \nearrow \phi_{\gamma,\sigma} & & \searrow (\gamma\sigma)_{*,\mathcal{F}} & \\ \rho_\gamma \rho_\sigma \mathcal{F} & & & & \mathcal{F} \rho'_{\gamma\sigma} \\ & \searrow \sigma_{*,\mathcal{F}} & & \nearrow \phi'_{\gamma,\sigma} & \\ & \rho_\gamma \mathcal{F} \rho'_\sigma & \xrightarrow{\gamma_{*,\mathcal{F}}} & \mathcal{F} \rho'_{\gamma} \rho'_\sigma & \end{array}$$

Enfin, si \mathcal{F} est une équivalence de catégories alors on dit que c'est une Γ -équivalence faible, et que ρ et ρ' sont des Γ -actions faiblement équivalentes.

Remarque 3.

- S'il n'y a pas d'ambiguïté on note $\gamma_* = \gamma_{*,\mathcal{F}}$.
- Dans [6] on définit en général un Γ -foncteur faible à droite (right-lax) sans la condition que les γ_* soient des équivalences, et faible à gauche (left-lax) avec un diagramme dual. En fait, supposer que 1_* est une équivalence naturelle et que la condition pentagonale à droite soit vérifiée implique que toutes les γ_* sont des équivalences et que le diagramme pentagonal à gauche est également commutatif.

– Si les actions sont strictes alors la commutativité du diagramme pentagonal revient à l'égalité

$$(\gamma\sigma)_* = \gamma_*\sigma_*$$

Définition 4. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} : C \rightarrow D$ deux Γ –foncteurs faibles. Une Γ –**transformation naturelle** de \mathcal{F} vers \mathcal{G} est une transformation naturelle $\eta : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \rho_\gamma \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta} & \rho_\gamma \mathcal{G} \\ \gamma_{*, \mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \gamma_{*, \mathcal{G}} \\ \mathcal{F} \rho'_\gamma & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{G} \rho'_\gamma \end{array}$$

Il se trouve que dans le cas où les catégories sont k –linéaires ($\text{char } k = 0$) on peut toujours se ramener à une Γ –action stricte. Pour ce faire, on note $\Omega(\Gamma)$ la catégorie dont les objets sont les éléments de G et $\text{Hom}(g, g) = k$ et si $g \neq h$ alors $\text{Hom}(g, h) = 0$, voir la preuve de [6; Thm 5.4]. L'action stricte de Γ est induite par la multiplication à gauche sur les objets. On démontre qu'une action Γ –faible sur C est faiblement équivalente à l'action stricte de Γ (induite par celle sur $\Omega(\Gamma)$) sur la catégorie C' dont les objets sont les Γ –foncteurs $\Omega(\Gamma) \rightarrow C$ et les morphismes sont les Γ –transformations naturelles. En remplaçant k par $\{id_G\}$ et 0 par \emptyset , on obtient l'énoncé valable pour toutes les catégories :

Théorème 1. (Shinder) Toute Γ –action faible est faiblement équivalente à une Γ –action stricte.

3 La représentation cohomologique des automorphismes d'un dessin

3.1 Les trois catégories enfantines

Rappelons d'abord le théorème initiateur, à partir de l'*Esquisse d'un programme* de A. Grothendieck, de la théorie des dessins d'enfants :

Théorème 2. (Belyi, 1979, [10])

Une courbe projective lisse connexe sur le corps des nombres complexes admet un modèle sur un corps de nombres si et seulement si elle est réalisable comme un revêtement de la droite projective non-ramifiée en dehors de trois points.

Comme tous les triplets de points sont équivalents via une transformation de Möbius appropriée, on peut se restreindre à supposer que les trois points de ramifications sont parmi $0, 1, \infty$. L'intérêt porté à la catégorie de ces revêtements provient donc d'une part du fait que toutes les courbes admettant un modèle sur un corps de nombres y sont à disposition, et d'autre part qu'elle est équivalente à deux autres catégories *enfantines* – pour reprendre les termes d'A. Grothendieck –¹

Proposition 1. Les catégories suivantes sont équivalentes

- B dont les objets, appelés **fonctions de Belyi**, sont les revêtements finis de courbes $\beta : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, étales sur \mathbb{P}_*^1 , et dont les morphismes sont les $C \rightarrow C'$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C' \\ & \searrow \beta & \downarrow \beta' \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- D dont les objets \mathcal{D} , appelés **dessins combinatoires** ou simplement **dessins**, sont des actions $\pi_1 \curvearrowright A$ transitives finies, et les morphismes $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ sont donnés par les applications $\phi : A \rightarrow A'$ tels que pour tout $g \in \pi_1$,²

$$\phi(g \cdot_{\mathcal{D}} a) = g \cdot_{\mathcal{D}'} \phi(a)$$

- G dont les objets Γ , appelés **dessins d'enfants**, sont des graphes finis bipartites (partagé entre sommets noirs et sommets blancs) plongés dans Σ une surface connexe orientée compacte telle que $\Sigma \setminus \Gamma$ est la somme topologique de disques ouverts, et dont les morphismes sont les homéomorphismes $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ préservant l'orientation et tels que $\phi(\Gamma) = \Gamma'$.

Preuve. Construisons un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ G & \longrightarrow & D \end{array}$$

Soit $\beta : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction de Belyi, on notera dans la suite du texte C_* la préimage de \mathbb{P}_*^1 .

1. C'est la catégorie G qui est littéralement enfantine selon le point de vue de Grothendieck, la catégorie D étant à mon sens *intuitive* pour des « êtres » tels des ordinateurs.

2. S'il n'y a pas d'ambiguïté on note $g \cdot a = g \cdot_{\mathcal{D}} a$.

B \rightarrow G Dans G , on lui associe $\Gamma := \beta^{-1}([0, 1]) \subset \Sigma := \mathcal{C}(\mathbb{C})$. Les sommets du graphe sont parmi les éléments de $\beta^{-1}(0)$ et de $\beta^{-1}(1)$ coloriés respectivement en noir et blanc. Les arêtes sont les composantes connexes de $\Gamma \setminus \beta^{-1}(0, 1)$, chacune étant homéomorphe à $]0, 1[$, car β est étale sur $]0, 1[$ qui est homéotope à un point. Chaque arête a relie donc une préimage de 0 à une préimage de 1, i.e. le graphe est bipartite. Enfin, les préimages de l^∞ sont en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de $\Sigma \setminus \Gamma$. Enfin chaque face est homéomorphe à un disque ouvert car $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus [0, 1]$ est homéotope à un point.

B \rightarrow D Dans D , on lui associe la « monodromie sur les arêtes », c'est-à-dire le dessin combinatoire donné par $\beta^{-1}(]0, 1[)^{cc}$ (l'ensemble des composantes connexes de la préimage du segment ouvert $]0, 1[$) muni de l'action de $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$.

G \rightarrow D Soit $\Gamma \subset \Sigma$ un dessin d'enfant. Notons A l'ensemble de ses arêtes. Ainsi chaque arête a deux sommets comme extrémités un blanc et un noir. On définit une action de π_1 sur A de la manière suivante : $x \cdot a$ (resp. $y \cdot a$) correspond selon l'orientation de Σ à l'arête suivant a autour du sommet noir (resp. blanc) qui lui est associé. La connexité de Σ implique le transitivité de $\pi_1 \curvearrowright A$.

Définissons le quasi-inverse $D \rightarrow B$, les autres s'en déduisant par le diagramme commutatif précédent. Un dessin combinatoire est en fait une monodromie topologique de la sphère S^2 avec $\{0, 1, \infty\}$ comme points de ramifications. Or la sphère n'a qu'une seule structure de surface de Riemann, par conséquent on peut construire de manière univoque [**Prop. 4.9; 7**] un revêtement ramifié de surfaces de Riemann compactes ayant la monodromie voulue. Comme les surfaces de Riemann sont compactes on peut réaliser le revêtement comme un revêtement de courbes projectives lisses non-ramifié en dehors de $\{0, 1, \infty\}$. Finalement le théorème de Belyi permet de définir ce revêtement ramifié de courbes sur un corps de nombres. \square

Définition 5. *Définissons des objets invariants par les équivalences de catégories construites ci-dessus.*

- Le **degré** est dans B le degré du revêtement, dans G le nombre d'arêtes et dans D le cardinal de l'ensemble.
- Dans B , si $\xi \in \{0, 1, \infty\}$ on note l_ξ le nombre de préimages de ξ par une fonction de Belyi. Dans D , si $\xi \in \{x, y, z\}$ et $\pi_1 \curvearrowright A$ un dessin on note l_ξ le nombre d'orbites par ξ dans A . Dans G , on note l_b (resp. l_n, l_f) le nombre de sommets blancs (resp. sommets noirs, faces).
- Le **genre** g est dans B celui de \mathcal{C} , dans G celui de Σ .
- Le **groupe de monodromie** est dans B celui de $\beta : \mathcal{C}_* \rightarrow \mathbb{P}_*^1$, dans D le groupe image de π_1 dans \mathfrak{S}_A , et dans G il est le sous-groupe des permutations des arêtes engendré par les rotations autour des sommets respectivement noirs et blancs. Ainsi il s'injecte dans \mathfrak{S}_d , où d est le degré.

Définition 6. *Définissons des propriétés se correspondant via les équivalences de catégories.*

- Dans B , on dit qu'une fonction de Belyi est **galoisienne** lorsque le revêtement étale associé est galoisien.
- Dans D , on dit qu'un dessin est **régulier** lorsque l'action associée est libre.
- Dans G , on dit qu'un dessin d'enfant est **régulier** lorsque le groupe de monodromie a le même cardinal que le nombre d'arêtes.

3.2 Le module de Parker

Définition 7. *Soit R un anneau. Sans spécifier l'espace topologique sous-jacent, on note \underline{R} le faisceau constant à coefficients dans R . Soit $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction de Belyi. On appelle **module de Parker de β à coefficients dans R** , et on note*

$$\mathcal{P}_R(\beta) := H_c^1(\mathbb{P}_*^1(\mathbb{C}), \beta_* \underline{R})$$

Remarque 8.

- $\beta_*\underline{R}$ est un faisceau localement constant sur l'ouvert $\mathbb{P}_*^1(\mathbb{C})$.
- On peut faire induire les automorphismes de $\text{Aut}(\beta)$ en des automorphismes R –linéaires du faisceau $\beta_*\underline{R}$ et donc des automorphismes R –linéaires de $\mathcal{P}_R(\beta)$.

Définition 9.

- On note $R\text{-Mod}$ la catégorie des R –modules.
- On note Mod_{aut} la catégorie des couples (S, M) où S est un anneau et M un S –module et les flèches sont des couples $(S \rightarrow S', M \rightarrow M')$ tels que les morphismes $M \rightarrow S \otimes'_S M'$ soient S –linéaires.
- Enfin, on note $R\text{-Mod}_{\text{aut}}$ la sous-catégorie de Mod_{aut} formée des couples où les anneaux sont des R –algèbres et les morphismes entre anneaux sont R –linéaires.

On a donc construit pour tout anneau R un foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\longrightarrow R\text{-Mod}_{\text{aut}} \\ \beta &\longmapsto (R[\text{Aut}(\beta)], \mathcal{P}_R(\beta)) \end{aligned}$$

et donc un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Ann} \times \mathbf{B} &\longrightarrow \text{Mod}_{\text{aut}} \\ (R, \beta) &\longmapsto (R[\text{Aut}(\beta)], \mathcal{P}_R(\beta)) \end{aligned}$$

Par conséquent, après avoir appliqué la dualité de Verdier, on obtient un groupe de cohomologie de π_1 le groupe fondamental de \mathbb{P}_*^1 . Autrement dit, le foncteur de la **proposition 1.** défini par $\beta \mapsto \mathcal{D}$ qui à β associe l'action $\pi_1 \curvearrowright A := \beta^{-1}(]0, 1[)$ permet de définir canoniquement $\mathcal{P}_R(\mathcal{D})$.

Définition 10. Soient R un anneau et \mathcal{D} un dessin donné par $\pi_1 \curvearrowright A$. On note $R[\mathcal{D}]$ le R –module libre de base notée $([a])_{a \in A}$ et muni de l'action R –linéaire de π_1 induite par celle sur la base

$$g \cdot [a] = [g \cdot a]$$

Par définition le groupe de monodromie agit sur $R[\mathcal{D}]$ comme action quotient de l'action de π_1 .

Remarque 11. Dans le cas où le dessin \mathcal{D} est régulier, et que G dénote son groupe de monodromie alors $R[\mathcal{D}]$ est isomorphe à $R[G]$ la représentation régulière de G à coefficients dans R .

Proposition 2. Soit \mathcal{D} un dessin. Alors $\mathcal{P}_R(\mathcal{D}) = H^1(\pi_1, R[\mathcal{D}]^\vee)^\vee$. De plus l'action de $\text{Aut}(\mathcal{D})$ est induite par celle sur le module $R[\mathcal{D}]$.

Preuve. Soit $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction de Belyi, et on note $\mathcal{L} = \beta_*\underline{R}$. La dualité de Verdier implique que

$$\mathcal{P}_R(\beta) = H_c^1(\mathbb{P}_*^1(\mathbb{C}), \mathcal{L}) \simeq (H^1(\mathbb{P}_*^1, \mathcal{L}^\vee))^\vee$$

On conclut en remarquant que \mathcal{L} étant un faisceau localement constant sur $\mathbb{P}_*^1(\mathbb{C})$ – car β est étale sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{C})$ – on peut calculer le H^1 comme le groupe de cohomologie de π_1 agissant sur la fibre de \mathcal{L} en un point générique, disons $1/2$, que l'on peut identifier aux composantes connexes de la fibre de \mathcal{L} sur $]0, 1[$ qui est exactement donnée par le π_1 –module qu'est $R[\mathcal{D}]$. \square

4 L'action pseudo-galoisienne de $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$

4.1 Sur les dessins

Rappelons que la flèche canonique d'image dense $\pi_1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1$ est injective car π_1 est libre donc résiduellement fini. Soient \mathcal{D} un dessin donné par $\pi_1 \curvearrowright A$ et G son groupe de monodromie. Notons S_a le stabilisateur d'un élément a de A et

$$N := \bigcap_{a \in A} S_a$$

L'action étant transitive, N est en fait l'intersection des conjugués d'un seul S_a , ou encore le noyau de $\pi_1 \twoheadrightarrow G \subset \mathfrak{S}_A$. Ainsi on peut étendre l'action de π_1 à une action de $\widehat{\pi}_1$, notée $\widehat{\mathcal{D}}$, via la flèche composée

$$\widehat{\pi}_1 = \varprojlim_{K \triangleleft \pi_1} \pi_1/K \longrightarrow \pi_1/N \longrightarrow G \hookrightarrow \mathfrak{S}_A$$

Pour tout $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$, on peut donc définir un dessin ${}^\gamma\mathcal{D}$, donné par une action de π_1 sur le même ensemble A exprimée par la flèche composée

$$\pi_1 \hookrightarrow \widehat{\pi}_1 \xrightarrow{\gamma^{-1}} \widehat{\pi}_1 \longrightarrow \mathfrak{S}_A$$

Autrement dit la nouvelle action de π_1 sur A est donnée par

$$g \underset{{}^\gamma\mathcal{D}}{\cdot} a := \gamma^{-1}(g) \underset{\widehat{\mathcal{D}}}{\cdot} a$$

Comme pour \mathcal{D} , l'action ${}^\gamma\mathcal{D}$ s'étend par densité à $\widehat{\pi}_1$ et vérifie pour tout $\widehat{g} \in \widehat{\pi}_1$,

$$\widehat{g} \underset{{}^\gamma\widehat{\mathcal{D}}}{\cdot} a := \gamma^{-1}(\widehat{g}) \underset{\widehat{\mathcal{D}}}{\cdot} a$$

Il s'agit bien d'un dessin puisque π_1 étant dense $\gamma(\pi_1)$ l'est aussi, et donc l'image de l'action est un sous-ensemble dense d'un ensemble discret : cela implique que l'action est bien transitive. Au passage cela montre que les groupes de monodromie sont égaux $G(\mathcal{D}) = G({}^\gamma\mathcal{D})$, en revanche ils n'ont pas le même triplet générateur associé aux images des lacets $x, y, z!$

Remarque 12. Les deux $\widehat{\pi}_1$ -actions $\widehat{\mathcal{D}}$ et ${}^\gamma\widehat{\mathcal{D}}$ sont isomorphes, mais comme a priori $\gamma(\pi_1) \neq \pi_1$ on ne peut PAS en déduire que les dessins $\mathcal{D}, {}^\gamma\mathcal{D}$ seraient isomorphes.

De manière similaire si $\mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ est un morphisme de dessins et $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ alors on a un morphisme ${}^\gamma\mathcal{D}' \longrightarrow {}^\gamma\mathcal{D}$ et cette construction est fonctorielle.

Proposition 3. La famille de foncteurs $(\mathcal{D} \mapsto {}^\gamma\mathcal{D})_\gamma$ définit une $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ -action stricte sur \mathcal{D} .

Cette action est appelée **pseudo-galoisienne**.

Preuve. Pour $\gamma = 1$, il s'agit du foncteur identité. Ainsi, montrer l'égalité ${}^\gamma({}^\sigma\mathcal{D}) = {}^{\gamma\sigma}\mathcal{D}$, pour tout dessin \mathcal{D} , impliquera avec $\sigma = \gamma^{-1}$ qu'on a en fait affaire à des équivalences de catégories. Finalement le diagramme d'associativité découlera directement de l'associativité de la multiplication dans $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$. Soient \mathcal{D} un dessin donné par $\pi_1 \curvearrowright A$, et $\gamma, \sigma \in \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$. Alors quels que soient $g \in \pi_1, a \in A$,

$$\begin{aligned} g \underset{{}^{\gamma\sigma}\mathcal{D}}{\cdot} a &= \sigma^{-1}\gamma^{-1}(g) \underset{\widehat{\mathcal{D}}}{\cdot} a \\ &= \gamma^{-1}(g) \underset{{}^\sigma\mathcal{D}}{\cdot} a \\ &= g \underset{{}^\gamma({}^\sigma\mathcal{D})}{\cdot} a \\ &= g \underset{{}^\gamma({}^\sigma\mathcal{D})}{\cdot} a \end{aligned}$$

□

Remarque 13. Premièrement, si γ est la conjugaison par $\widehat{h} \in \widehat{\pi}_1$ alors les dessins³ \mathcal{D} et \mathcal{D}^γ sont isomorphes via l'application

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto \widehat{h} \cdot a \end{aligned}$$

Il en suit qu'en considérant $\widetilde{\mathcal{D}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{B}}$) la catégorie des classes d'isomorphismes de dessins (resp. fonctions de Belyi) et en passant au quotient dans $\text{Out}(\widehat{\pi}_1)$ on obtient des actions faibles. De plus, en composant par le foncteur $\widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$ induit par le foncteur $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}$ de la **proposition 1**, on a sur la catégorie $\widetilde{\mathcal{B}}$

$$\text{l'action pseudo-galoisienne de } G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Out}(\widehat{\pi}_1) = \text{l'action galoisienne usuelle de } G_{\mathbb{Q}}$$

Rappelons finalement qu'il est préférable de rester dans $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ pour la simple raison qu'en fine l'intérêt sera uniquement porté sur le sous-groupe $\widehat{\mathbf{GT}}$ qui contient un relevé de l'image canonique de $G_{\mathbb{Q}}$ dans $\text{Out}(\widehat{\pi}_1)$, autrement dit le seul automorphisme intérieur considéré est l'identité.

4.2 Sur le module de Parker l -adique

Lemme 4. (Serre) Notons $\iota : \pi_1 \hookrightarrow \widehat{\pi}_1$. Soit M un π_1 -module fini également muni d'une structure de $\widehat{\pi}_1$ -module compatible avec ι . Alors $\forall n \geq 0$, la flèche de restriction $\text{res} := \iota^*$ induite en cohomologie est un isomorphisme

$$H^n(\widehat{\pi}_1, M) \xrightarrow[\simeq]{\text{res}} H^n(\pi_1, M)$$

Preuve. [Cohomologie Galoisienne, Serre] □

Définition 14. Soit l un nombre premier. Le module de Parker l -adique est défini par

$$\mathcal{P}_{(l)}(\mathcal{D}) := \varprojlim_n \mathcal{P}_{\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}(\mathcal{D})$$

Remarque 15. La définition est en fait équivalente à celle de la cohomologie étale l -adique. La restriction aux coefficients finis est moralement la même que celle provenant du fait que si X est une variété définie sur \mathbb{C} alors l'isomorphisme « cohomologie étale de $X \simeq$ cohomologie topologique de $X(\mathbb{C})$ » marche pour les coefficients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mais pas pour \mathbb{Z} par exemple.

Soit $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$, et supposons R fini. Soit \mathcal{D} un dessin donné par $\pi_1 \curvearrowright A$. Alors d'après la **remarque 9**, $\widehat{\mathcal{D}}$ et $\widehat{\gamma\mathcal{D}}$ sont des $\widehat{\pi}_1$ -ensembles isomorphes, sur les R -modules associés cela donne le couple d'isomorphismes

$$\gamma : \widehat{\pi}_1 \longrightarrow \widehat{\pi}_1 \quad \text{id} : R[\mathcal{D}]^\vee \longrightarrow R[\gamma\mathcal{D}]^\vee$$

qui induit donc un isomorphisme R -linéaire $H^1(\widehat{\pi}_1, R[\gamma\mathcal{D}]^\vee) \longrightarrow H^1(\widehat{\pi}_1, R[\mathcal{D}]^\vee)$. Or par restriction on tombe sur $H^1(\pi_1, \cdot)$ qui correspond au module de Parker, et ainsi en dualisant et en appliquant le **lemme 4** on peut via le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(\widehat{\pi}_1, R[\mathcal{D}]^\vee)^\vee & \xleftarrow[\simeq]{\text{res}^*} & \mathcal{P}_R(\mathcal{D}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \text{dotted} \\ H^1(\widehat{\pi}_1, R[\gamma\mathcal{D}]^\vee)^\vee & \xleftarrow[\simeq]{\text{res}^*} & \mathcal{P}_R(\gamma\mathcal{D}) \end{array}$$

3. c'est-à-dire en tant qu'actions de π_1

définir un morphisme $\dots \rightarrow$ entre modules de Parker à coefficients dans R . Si l est premier alors en prenant la limite sur les $R = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ on obtient un morphisme

$$\gamma_*(\mathcal{D}) : \mathcal{P}_{(l)}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{P}_{(l)}(\gamma\mathcal{D})$$

Proposition 5. $\mathcal{P}_{(l)}$ est un $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ -foncteur faible pour l'action pseudo-galoisienne sur \mathcal{D} et l'action triviale sur Mod .

Preuve. Les actions étant strictes il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{(l)} & \xrightarrow{(\gamma\sigma)_*} & \mathcal{P}_{(l)}(\gamma\sigma(-)) \\ & \searrow \sigma_* & \nearrow \gamma_* \\ & \mathcal{P}_{(l)}(\sigma(-)) & \end{array}$$

Elle découle du diagramme usuel sur la cohomologie de $\widehat{\pi}_1$ et de la naturalité du foncteur res^* . \square

4.3 Fidélité de la représentation des automorphismes

Soit $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction de Belyi. On a en fait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(\beta) & \longrightarrow & \text{GL}(\mathcal{P}_R(\beta)) \\ \downarrow & \searrow \Psi & \downarrow \\ \text{Mod}(\mathcal{C}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \text{GL}(H^1(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \underline{R})) \end{array}$$

où $\text{Mod}(\Sigma)$ dénote le mapping class group d'une surface Σ . Il se trouve que Ψ est à valeurs dans les matrices symplectiques pour le nombre d'intersection, et d'après [Theorems 6.8 & 6.9; 9] Ψ est une injection si $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m \geq 3$ et $g(\mathcal{C}) \geq 1$, cela impliquant en particulier que le module de Parker est une représentation fidèle de $\text{Aut}(\beta)$.

Si \mathcal{D} est un dessin quelconque alors je conjecture la fidélité de la représentation

$$\text{Aut}(\mathcal{D}) \longrightarrow \text{GL}(\mathcal{P}_R(\mathcal{D}))$$

Rappelons que dans la catégorie \mathcal{D} le groupe des automorphismes $\text{Aut}(\mathcal{D})$ d'un dessin \mathcal{D} (donné par $\pi_1 \curvearrowright A$) s'exprime aisément, et se calcule même facilement sur machine⁴ :

Proposition 6. (Corollary 2.1, [4]) Pour tout $a \in A$, on note G_a le stabilisateur de a dans G le groupe de monodromie de \mathcal{D} . Alors

$$\text{Aut}(\mathcal{D}) = \text{Cent}_{\mathfrak{S}_A}(G) \quad \text{et} \quad \text{Norm}_G(G_a)/G_a \simeq \text{Aut}(\mathcal{D})$$

Preuve. $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{D})$ si et seulement si $\phi : A \rightarrow A$ est une bijection telle que pour tout $g \in \pi_1$,

$$\phi(g \cdot a) = g \cdot (\phi(a))$$

c'est-à-dire si pour tout $g \in G$, $\phi \circ g = g \circ \phi$ dans \mathfrak{S}_A .

Soit $a \in A$. On considère le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \text{Norm}_G(G_a)/G_a &\longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{D}) \\ h &\longmapsto (g \cdot a \mapsto gh^{-1} \cdot a) \end{aligned}$$

Cette flèche est bien définie. En effet, d'une part G agit transitivement sur A et si $h \in \text{Norm}_G(G_a)$ et $g_2 \cdot a = g_1 \cdot a$ alors $g_2 = g_1 t$, où $t \in G_a$, et donc

$$g_2 h^{-1} \cdot a = g_1 t h^{-1} \cdot a = g_1 h^{-1} \cdot (\underbrace{h t h^{-1}}_{\in G_a} \cdot a) = g_1 h^{-1} \cdot a$$

D'autre part $\forall g_1, g_2, h$,

$$g_2 \cdot (g_1 h^{-1} \cdot a) = (g_2 \cdot g_1) h^{-1} \cdot a$$

on tombe donc bien dans les endomorphismes de \mathcal{D} et donc dans les automorphismes de \mathcal{D} car A est fini, et $\forall h_1, h_2, g$,

$$g(h_1 h_2)^{-1} \cdot a = (g h_2^{-1}) h_1^{-1} \cdot a$$

la flèche est donc un morphisme de groupes.

4. avec GAP par exemple, où on encoderait un dessin par deux permutations de $\{1, \dots, d\}$ engendrant un sous-groupe transitif de \mathfrak{S}_d .

Le premier calcul avec $g' = 1$ montre que le noyau est G_a . La surjectivité se montre de la façon suivante. Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{D})$. Alors, G agissant transitivement on peut définir $h \in G$ tel que $\phi(a) = h^{-1} \cdot a$. Or ϕ vérifie

$$\phi(g \cdot a) = g \cdot \phi(a) = gh^{-1} \cdot a$$

il reste donc à montrer que $h \in \text{Norm}_G(G_a)$. Cela découle du fait que si $g \in G_a$ alors

$$hgh^{-1} \cdot a = h \cdot \phi(g \cdot a) = h \cdot \phi(a) = hh^{-1} \cdot a = a$$

□

Corollaire 7. *Supposons que $\pi_1 \curvearrowright A$ est libre et soit $a \in A$. On peut identifier G à A via la condition $1 \mapsto a$. De plus, $\text{Aut}(\mathcal{D}) \simeq G$ et*

$$G \curvearrowright A \simeq \underbrace{G \curvearrowright G}_{\text{multip. à gauche}} \qquad \text{Aut}(\mathcal{D}) \curvearrowright A \simeq \underbrace{G \curvearrowright G}_{\text{multip. à droite}}$$

Preuve. Le fait que l'action est libre implique que $G_a = \{1\}$. Ainsi on peut définir $g \mapsto g \cdot a$ qui est une application bijective $G \xrightarrow{\sim} A$. D'après la **proposition 6**, $\text{Aut}(\mathcal{D}) \simeq \text{Norm}_G(\{1\})/\{1\} = G$. L'identification implique directement que l'action de monodromie est la multiplication à gauche. Par ailleurs, cette dernière commute avec la multiplication à droite qui s'injecte donc dans $\text{Aut}(\mathcal{D})$. L'égalité des cardinaux conclut. □

Lemme 8. *$\text{Aut}(\mathcal{D})$ agit librement sur A .*

Preuve. En effet, si $\alpha(a) = a$ alors pour tout $g \in G$, $\alpha(g \cdot a) = g \cdot \alpha(a) = g \cdot a$, et comme G agit transitivement sur A il en suit que $\alpha = \text{id}$. □

Conjecture 1. *$\text{Aut}(\mathcal{D})$ agit librement sur $\mathcal{P}_R(\mathcal{D})$.*

5 Vers la tour ARC

5.1 La tour des corps de modules

Calculer les orbites par $G_{\mathbb{Q}}$ dans \mathcal{D} est en toute généralité un problème très difficile. À l'exception d'utiliser certains invariants qui impliquent immédiatement que l'orbite est triviale, la seule possibilité à présent consiste à calculer dans certains exemples explicitement les équations définissant un revêtement $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ ([4] en propose un panorama). Au-delà de calculer l'orbite, on peut se restreindre à calculer le groupe fini image de $G_{\mathbb{Q}}$ uniquement en tant que sous-groupe de $\tilde{\mathfrak{S}}_n$, où n est le cardinal de l'orbite. La façon la plus directe consiste à calculer le corps de modules du revêtement. Dans la suite on note $\mathcal{M}_r(\mathcal{D})$ le corps de modules de $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, et $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ le corps de modules de \mathcal{C} . En considérant $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ dernier comme un G -revêtement [8], c'est-à-dire le revêtement donné avec ses automorphismes qui sont tous définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on peut aussi considérer un corps de module noté $\mathcal{M}_{\text{aut}}(\mathcal{D})$. Rappelons que ces corps de nombres sont définis par

- $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathcal{M}(\mathcal{C})) = \text{Stab}(\mathcal{C}) = \{\tau \in G_{\mathbb{Q}}, \tau\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}\}$
- $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathcal{M}_r(\mathcal{D})) = \text{Stab}_r(\mathcal{D})$ si et seulement s'il existe iso_{τ} tel que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} \tau\mathcal{C} & \xrightarrow{\text{iso}_{\tau}} & \mathcal{C} \\ & \searrow \tau_{\beta} & \downarrow \beta \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- $\tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathcal{M}_{\text{aut}}(\mathcal{D})) = \text{Stab}_{\text{aut}}(\mathcal{D})$ si et seulement s'il existe iso_{τ} tel que $\forall \alpha \in \text{Aut}(\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1)$ la pyramide suivante est commutative

$$\begin{array}{ccccc} & & \tau\mathcal{C} & \xrightarrow{\text{iso}_{\tau}} & \mathcal{C} \\ & \swarrow \tau_{\alpha} & & & \searrow \alpha \\ \tau\mathcal{C} & \xrightarrow{\text{iso}_{\tau}} & \mathcal{C} & & \\ & \searrow \tau_{\beta} & & & \downarrow \beta \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

De cette description il vient que $\text{Stab}_{\text{aut}}(\mathcal{D}) \subset \text{Stab}_r(\mathcal{D}) \subset \text{Stab}(\mathcal{C}) \subset G_{\mathbb{Q}}$, qui se retranscrit en une tour de corps de nombres, appelée tour ARC,

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}_{\text{aut}}(\mathcal{D}) \\ | \\ \mathcal{M}_r(\mathcal{D}) \\ | \\ \mathcal{M}(\mathcal{C}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Dans la catégorie \mathcal{B} , la seule action canonique est celle du groupe $G_{\mathbb{Q}}$. Pour autant dans la catégorie combinatoire \mathcal{D} , on peut faire agir tout le groupe $\text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$. Étendant l'action de $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Out}(\widehat{\pi}_1)$, cette action pseudo-galoisienne est beaucoup trop vaste et il s'agit de la restreindre pour retrouver $G_{\mathbb{Q}}$. C'est l'idée derrière la construction de $\widehat{\mathbf{GT}} \subset \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$. Dans la partie suivante on explicite une décomposition du module de Parker qui est tout à fait analogue à la tour ARC.

5.2 La décomposition ARC du module de Parker

Il s'agit principalement de « boucher les trous » de la surface $\mathcal{C}_*(\mathbb{C})$ pour obtenir $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ la « partie courbe » du revêtement. Ce qui est « perdu » au passage est la « partie revêtement » qui « permet de différencier » deux revêtements définis sur la même courbe.

Proposition 9. Soit $\beta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fonction de Belyi. On dispose d'une suite exacte de $R[\text{Aut}(\beta)]$ -modules

$$0 \longrightarrow \beta_* \underline{R}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow (\beta_* \underline{R})_0 \oplus (\beta_* \underline{R})_1 \oplus (\beta_* \underline{R})_\infty \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}_R(\beta) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \underline{R}) \longrightarrow 0$$

On note par ailleurs $\mathcal{R}_R(\beta)$ l'image de ϕ .

Preuve. (de la proposition) Le long de cette preuve, on note $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L} = \beta_* \underline{R}$.

$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ étant à fibres discrètes, la suite spectrale de Leray dégénère au rang 1 et pour $i \geq 1$, $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}) = H^i(\mathbb{P}^1, \beta_* \underline{R}) \simeq H^i(\mathcal{C}, \underline{R})$. On écrit la partition $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}_*^1 \cup \{0, 1, \infty\}$. Comme \mathbb{P}^1 et $\{0, 1, \infty\}$ sont compacts, on a en cohomologie à supports compacts la suite exacte longue suivante :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \overbrace{H_c^0(\mathbb{P}_*^1, \mathcal{L})}^{=0} \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(\{0, 1, \infty\}, \mathcal{L}) \\ \longrightarrow H_c^1(\mathbb{P}_*^1, \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}) \longrightarrow \underbrace{H^1(\{0, 1, \infty\}, \mathcal{L})}_{=0, \text{ car } \{0, 1, \infty\} \text{ est discret}} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'égalité $H^0(\{\xi\}, \mathcal{L}) = \mathcal{L}_\xi$. □

Remarque 16. $\mathcal{R}_R(\beta)$ est en fait une somme directe de trois sous- $R[\text{Aut}(\beta)]$ -modules.

Dans la terminologie de la catégorie \mathcal{D} on obtient comme corollaire :

Corollaire 10. Soit \mathcal{D} un dessin. On dispose d'une suite exacte de $R[\text{Aut}(\mathcal{D})]$ -modules

$$0 \longrightarrow R[\mathcal{D}]^{\pi_1} \xrightarrow[\text{diag.}]{\text{plong.}} R[\mathcal{D}]^x \oplus R[\mathcal{D}]^y \oplus R[\mathcal{D}]^z \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}_R(\mathcal{D})$$

On note $\mathcal{R}_R(\mathcal{D})$ l'image de ϕ . Il existe de plus un entier $g(\mathcal{D})$, appelé **genre du dessin**⁵, tel que

$$\mathcal{P}_R(\mathcal{D}) / \mathcal{R}_R(\mathcal{D}) \simeq R^{2g(\mathcal{D})}$$

Preuve. Rappelons que les éléments de $R[\mathcal{D}]$ sont identifiés aux sections globales du faisceau localement constant, restreint à $]0, 1[$, associé à une fonction de Belyi. L'équivalence de catégories $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ nous donne donc fonctoriellement la première partie de la suite exacte. Le reste se fait en choisissant un isomorphisme du H^1 de la courbe avec R^{2g} où g est le genre au choix topologique ou algébrique. □

Remarque 17. Comme dit, $\mathcal{R}_R(\mathcal{D})$ est en fait une somme directe de trois sous- $R[\text{Aut}(\mathcal{D})]$ -modules. Cela se voit notamment par le fait que l'action de $\text{Aut}(\mathcal{D})$ sur les quatre premiers termes de la suite exacte est celle induite par l'action de permutation canonique de $\text{Aut}(\mathcal{D})$ sur $R[\mathcal{D}]$ qui stabilise chaque espace invariant. Il est par ailleurs crucial de noter que dans la catégorie \mathcal{B} , on accède directement à la donnée de la courbe sous-jacente. Ce qui n'est pas le cas dans le cadre combinatoire de la catégorie \mathcal{D} . On verra dans la suite les cas où on peut travailler avec un « H^1 de la courbe » qui complétera fonctoriellement la suite exacte du corollaire.

5. indépendant de la classe d'isomorphisme de \mathcal{D} dans \mathcal{D} , et correspondant aux « autres » genres

Proposition 11. *Si d désigne le degré alors le module de Parker est un R -module libre de rang $d + 1$.*

Preuve. ⁶Montrons-le dans la catégorie \mathcal{D} . Soit \mathcal{D} un dessin défini par $\pi_1 \curvearrowright A$, et $a \in A$. Alors en notant $S = \text{Stab}_{\pi_1}(a)$ on a l'identification suivante

$$\begin{aligned} \pi_1 \curvearrowright A &\xrightarrow{\sim} \pi_1 \underset{\text{gauche}}{\overset{\text{mult. à}}{\curvearrowright}} \pi_1/S \\ a &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Il en résulte que le π_1 -module $R[\mathcal{D}]$ est le module co-induit du S -module trivial R . Or S est d'indice fini dans π_1 égal au degré d , et donc $\mathbf{Co-ind}_S^{\pi_1} = \mathbf{Ind}_S^{\pi_1}$. Le lemme de Shapiro implique que

$$\begin{aligned} H^1(S, R^\vee) &\simeq H^1(\pi_1, \mathbf{Co-ind}_S^{\pi_1}(R^\vee)) \\ &\simeq H^1(\pi_1, \mathbf{Ind}_S^{\pi_1}(R^\vee)) \\ &\simeq H^1(\pi_1, (\mathbf{Ind}_S^{\pi_1}(R))^\vee) \\ &\simeq H^1(\pi_1, R[\mathcal{D}]^\vee) \end{aligned}$$

Or S est un sous-groupe d'un groupe libre à $t = 2$ générateurs donc S est libre de rang

$$[\pi_1 : S](t - 1) + 1 = d + 1$$

Finalement

$$H^1(S, R^\vee) \simeq H^1(S, R) \simeq \text{Hom}(S^{\text{ab}}, R) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}^{d+1}, R) \simeq R^{d+1}$$

□

Exprimée dans la catégorie \mathcal{G} , on retrouve la formule bien connue :

Corollaire 12. *(Calcul de la caractéristique d'Euler)*

Soit Γ un dessin d'enfant sur une surface de genre g . Alors

$$2 - 2g = \text{nombre de sommets} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de faces}$$

Preuve. Transcrit en un dessin \mathcal{D} donné par une action $\pi_1 \curvearrowright A$ dans la catégorie \mathcal{D} , on a la correspondance :

$$\begin{aligned} \text{nombre de sommets} &= l_x + l_y \\ \text{nombre d'arêtes} &= d \\ \text{nombre de faces} &= l_z \end{aligned}$$

Par ailleurs, les R -modules invariants s'écrivent

$$R[\mathcal{D}]^\xi = \bigoplus_{O \in \langle \xi \rangle \setminus A} R[O] \simeq R^{\langle \xi \rangle \setminus A} \simeq R^{l_\xi}$$

où $[O] := \sum_{a \in O} [a]$ est la somme indexée par O des éléments de la base canonique de $R[\mathcal{D}]$. De même $R[\mathcal{D}]^{\pi_1}$ est un R -module libre, et de rang 1 car π_1 agit transitivement sur A . D'après le **corollaire 10**, on a l'égalité des rangs

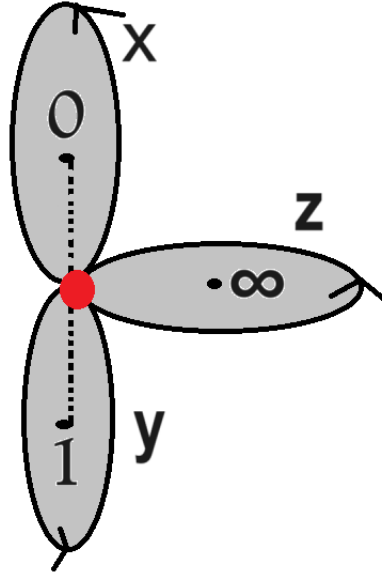
$$1 - (l_x + l_y + l_z) + (d + 1) - 2g = 0$$

□

6. à partir d'une idée de B.Enriquez

Soit \mathcal{D} un dessin. Le module de Parker peut se calculer concrètement de la manière suivante. On sait que $\mathcal{P}_R(\mathcal{D})$ est isomorphe à $H^1(\mathbb{P}_*^1, \mathcal{L}^\vee)^\vee$, où \mathcal{L} est un faisceau localement constant. Par conséquent, il peut être exprimé comme le dual d'une cohomologie singulière simpliciale à coefficients locaux, c'est-à-dire $H_{\text{sing}}^1(\mathbb{P}_*^1, R\{\mathcal{D}\}^\vee)^\vee$. Pour se faire on décrit l'ouvert \mathbb{P}_*^1 comme homotope au CW-complexe de la sphère privée de trois disques ouverts (en gris ci-dessous) autour de $0, 1, \infty$, composé :

- d'une 0-cellule donnée par le point $1/2$ (en rouge ci-dessous),
- de trois 1-cellules données par les lacets x, y, z ,
- d'une 2-cellule.



Le complexe cellulaire associé permet ainsi de voir $\mathcal{P}_R(\mathcal{D})$ comme un R -module quotient d'un sous- R -module

$$W_R(\mathcal{D}) \subset \bigoplus_{\xi \in \{x, y, z\}} R[\mathcal{D}]_{(\xi)}$$

où $R[\mathcal{D}]_{(\xi)}$ est une copie de $R[\mathcal{D}]$. Chaque module invariant $R[\mathcal{D}]^\xi$ s'envoie dans $W_R(\mathcal{D})$ via

$$\iota_\xi : R[\mathcal{D}]^\xi \xrightarrow{\cong} (R[\mathcal{D}]_{(\xi)})^\xi \hookrightarrow W_R(\mathcal{D})$$

Or détecter les modules invariants se fait aisément en définissant les projecteurs idoines. Cela se fait via des barycentres, et par conséquent il faut s'assurer que certains entiers sont inversibles dans R .

Définition 18. On note $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ l'ensemble des entiers divisant $o_x o_y o_z$, où o_ξ est l'ordre d'un élément ξ du groupe de monodromie. Dans le cas où $\mathcal{S}(\mathcal{D}) \subset R^\times$ on note

$$\begin{aligned} \pi_\xi : R[\mathcal{D}] &\longrightarrow R[\mathcal{D}] \\ v &\longmapsto \frac{1}{o_\xi} \sum_{i=1}^{o_\xi} \xi^i \cdot v \end{aligned}$$

Remarque 19. En notant par ξ l'endomorphisme $v \mapsto \xi \cdot v$, on a la relation

$$(\xi - 1) \circ \pi_\xi = \pi_\xi \circ (\xi - 1) = (\xi)^{o_\xi} - 1 = 0$$

Proposition 13. *Supposons que $\mathcal{S}(\mathcal{D}) \subset R^\times$. Notons par π l'endomorphisme de $\mathcal{P}_R(\mathcal{D})$ induit par l'endomorphisme de $W_R(\mathcal{D})$*

$$\pi_x \oplus \pi_y \oplus \pi_z$$

Alors π est un projecteur $R[\text{Aut}(\mathcal{D})]$ -équivariant d'image $\mathcal{R}_R(\mathcal{D})$.

Preuve. Soit $\xi \in \{x, y, z\}$. Si $a \in A$ alors

$$\pi_\xi \circ \pi_\xi([a]) = \frac{1}{o_\xi^2} \sum_{b \in \{\xi^i \cdot a\}} \sum_{c \in \{\xi^i \cdot b\}} [c] = \frac{1}{o_\xi^2} \sum_{b \in \{\xi^i \cdot a\}} o_\xi [b] = \pi_\xi([a])$$

Ainsi π_ξ est un projecteur, et les calculs précédents montrent que π_ξ est d'image $R[\mathcal{D}]^\xi$. De plus π_ξ est $\text{Aut}(\mathcal{D})$ -équivariant car les éléments de $\text{Aut}(\mathcal{D})$ commutent avec ξ . \square

Corollaire 14. *Supposons que $\mathcal{S}(\mathcal{D}) \subset R^\times$. Notons $\mathcal{H}_R(\mathcal{D}) := \ker \pi$. Alors on a la décomposition ARC en somme de $R[\text{Aut}(\mathcal{D})]$ -modules*

$$\mathcal{P}_R(\mathcal{D}) = \mathcal{R}_R(\mathcal{D}) \oplus \mathcal{H}_R(\mathcal{D})$$

On peut définir

$$\mathcal{R}_{(l)}(\mathcal{D}) := \varprojlim_n \mathcal{R}_{\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}(\mathcal{D})$$

et pour $l \notin \mathcal{S}(\mathcal{D})$,⁷

$$\mathcal{H}_{(l)}(\mathcal{D}) := \varprojlim_n \mathcal{H}_{\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}}(\mathcal{D})$$

Corollaire 15. *Supposons que $l \notin \mathcal{S}(\mathcal{D})$. Alors on a une somme directe de $\mathbb{Z}_l[\text{Aut}(\mathcal{D})]$ -modules*

$$\mathcal{P}_{(l)}(\mathcal{D}) = \mathcal{R}_{(l)}(\mathcal{D}) \oplus \mathcal{H}_{(l)}(\mathcal{D})$$

7. c'est-à-dire que pour tout n , $\mathcal{S}(\mathcal{D}) \subset (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^\times$

6 Quelques exemples

6.1 Les arbres

On se place ici dans le cas des dessins d'enfants dont le graphe est un arbre. Un arbre peut se plonger de plusieurs manières dans une surface de Riemann mais celle-ci sera toujours de genre 0, et quitte à enlever un point de l'unique face, la donnée du dessin d'enfant est celle du plongement d'un arbre dans le plan. Soit \mathcal{T} un dessin (combinatoire) de degré d associé à un plongement d'un arbre dans le plan, par abus de langage \mathcal{T} « est » un arbre, et R est un anneau.

Lemme 16. $\mathcal{P}_R(\mathcal{T}) = \mathcal{R}_R(\mathcal{T}) \simeq R[\mathcal{T}]^x \oplus R[\mathcal{T}]^y$

Preuve. En utilisant le **corollaire 10.** et le fait que $g(\mathcal{T}) = 0$ on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow R[\mathcal{T}]^{\pi_1} \xrightarrow[\text{diag.}]{\text{plong.}} R[\mathcal{T}]^x \oplus R[\mathcal{T}]^y \oplus R[\mathcal{T}]^z \longrightarrow \mathcal{P}_R(\mathcal{T}) \longrightarrow 0$$

Or le dessin n'a qu'une seule face et donc z agit transitivement. Cela se traduit par $R[\mathcal{T}]^z = R[\mathcal{T}]^{\pi_1}$. D'où le résultat. \square

Proposition 17. *On a une suite exacte de $R[\text{Aut}(\mathcal{T})]$ -modules*

$$0 \longrightarrow R[\mathcal{T}]^{\pi_1} \xrightarrow[\text{diag.}]{\text{plong.}} \mathcal{P}_R(\mathcal{T}) \xrightarrow{\psi} R[\mathcal{T}] \longrightarrow 0$$

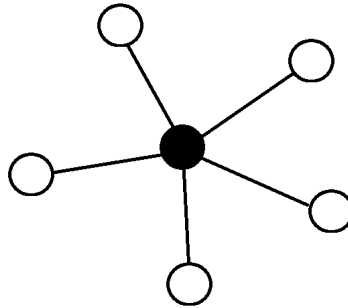
Preuve. Posons $\psi(v, w) := v - w$. Comme x, y engendrent π_1 , on a l'égalité $R[\mathcal{T}]^x \cap R[\mathcal{T}]^y = R[\mathcal{T}]^{\pi_1}$. La surjection de ψ découle du fait que les trois modules sont libres et que

$$\text{rg } \mathcal{P}_R(\mathcal{T}) = d + 1 = \text{rg } R[\mathcal{T}] + \text{rg } R[\mathcal{T}]^{\pi_1}$$

\square

Corollaire 18. *Si \mathcal{T} est régulier et K un corps alors $\mathcal{P}_K(\mathcal{T})$ est la représentation régulière de $\text{Aut}(\mathcal{T})$ à coefficients dans K plus la représentation triviale.*

Exemple 2. *Notons \mathcal{S}_n l'étoile à n branches. Pour $n = 5$:*



\mathcal{S}_n est régulier, et si $(\chi_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ désigne la famille des caractères irréductibles de $\text{Aut}(\mathcal{S}_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors le caractère de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_n)$ est

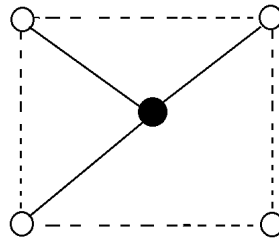
$$2\chi_0 + \sum_{i \neq 0} \chi_i$$

6.2 Les dessins cycliques

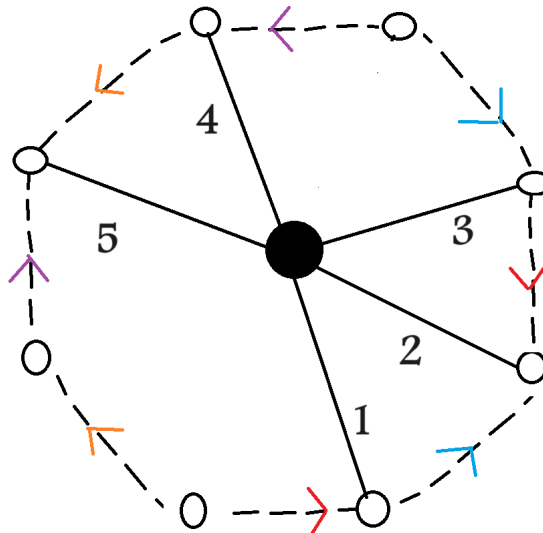
Soient p premier ≥ 3 et $\gamma = (x, y, z)$ un triplet d'éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ de somme nulle. Alors il donne lieu au dessin galoisien \mathcal{D}_γ de groupe de monodromie $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, à une face, un sommet blanc, un sommet noir. Le revêtement $\beta_\gamma : X_\gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ associé est donné par la compactification et désingularisation d'un revêtement affine non ramifié en dehors de $\{0, 1\}$, résumé par le diagramme suivant (commutatif en dehors des points à l'infini où les flèches en pointillés n'y sont pas définies)

$$\begin{array}{ccc} X_\gamma & \xrightarrow{\beta_\gamma} & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{t^p = s^x(s-1)^y\} & \xrightarrow{(t,s) \mapsto s} & \mathbb{A}^1 \\ \subset \mathbb{A}^2 & & \end{array}$$

1. Si $p = 3$ on obtient $x = y = z = 1$ et l'équation affine $t^3 = s^2 - s$ de la courbe elliptique de j -invariant 0 (le dessin est obtenu en identifiant les côtés opposés) :



2. Si $p = 5, x = 1, y = 1, z = 3$ alors \mathcal{D}_γ est le dessin suivant (où deux côtés de l'octogone sont identifiés selon l'orientation indiquée par deux flèches de même couleur) :



\mathcal{D}_γ est de degré $p = \#\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc est régulier, et de genre $g = 1 + \frac{p-1-1-1}{2} = (p-1)/2$

Conjecture 2. Le caractère de $\text{Aut}(\mathcal{D}_\gamma) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ obtenu via $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_\gamma)$ le module de Parker à coefficients dans \mathbb{C} est

$$\chi = 2\chi_0 + \sum_{i=1}^g \chi_i + \chi_{-i}$$

où $(\chi_i)_{i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ est la famille des caractères irréductibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7 Conclusion

Dans la suite de mon travail, il s'agira :

- d'exprimer l'action galoisienne de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la tour ARC d'un dessin via l'action pseudo-galoisienne de $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{\pi}_1)$ sur le module de Parker ; plus précisément, sur les différentes complétions l -adiques de la tour ARC via l'action pseudo-galoisienne sur le module de Parker l -adique.
- de comprendre le lien entre l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{D})$, qui est en fait composé des entiers divisant abc où $\Delta(a, b, c)$ est le groupe triangulaire associé à \mathcal{D} , et la courbe sous-jacente à \mathcal{D} . Ce travail se fera dans le cadre des dessins modulaires en collaboration avec Harshavardhan Reddy (*Tata Institute for Fundamental Research (TIFR), Mumbai*), et sous la direction de Krishnendu Gongopadhyay (*Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali*)
- de regarder l'action pseudo-galoisienne dans la catégorie B (resp. D) en remplaçant H_c^1 par H_c^2 (resp. H^1 par H^0) dans la définition du module de Parker. On pourra y déceler l'action cyclotomique, et faire le lien avec l'accouplement de Weil qui fait intervenir le cup-produit sur la « partie courbe ».

Bibliographie.

- [0] : S. Alloun, *Cohomological representation of the automorphism group of a dessin d'enfant*, Grothendieck-Teichmüller Theory Workshop, ICTS-TIFR Bangalore, Inde (https://youtu.be/Onk-BKfg_4Q?list=PL04QVxpjcnjj-7bMIZG1smxVh_6gvHbki)
- [1] : L. Schneps et al., *Dessins d'enfants on the Riemann sphere* in *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, Cambridge University Press (1994)
- [2] : V. G. Drinfel'd, *On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and some group closely associated with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. J.2, 4 pp 829-860 (1991)
- [3] : J. Oesterlé, *Dessins d'enfants*, Séminaire Bourbaki 44, pp 285-305 (2001-2002)
- [4] : G. A. Jones & J. Wolfart, *Dessins d'enfants on Riemann surfaces*, Springer (2016)
- [5] : D. Harbater, *Galois coverings of the arithmetic line* in *Number theory : a seminar held at the Graduate School and University Center of the City University of New York*, Springer-Verlag (1987)
- [6] : E. Shinder, *Group actions on categories and Elagin's theorem revisited*, European Journal of Mathematics 4, 413-422 (2018)
- [7] : R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, American Mathematical Society (1995)
- [8] : P. Dèbes & J.-C. Douai, *Algebraic Covers : Field of Moduli versus Field of Definition.*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 30, no. 3, p.303-338 (1997)
- [9] : F. Benson & D.Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton Mathematical Series (2011)
- [10] : G. V. Belyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 43 :2 (1979), pp 267-276 ; Math. USSR-Izv., 14 :2 (1980),pp 247-256