La série harmonique diverge.

Supposons que la série des inverses des entiers naturels converge, notons-la E. Alors il en va de même pour la série des inverses des entiers naturels impairs, notons-la I. À partir de la bijection $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$, $k = 2^s(2n+1)$, je peux écrire

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s(2n+1)} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \right) = 2I$$

Ainsi

$$0 = E - 2I = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}}_{= \frac{1}{n(2n+1)}} \quad - \quad 2$$

Finalement,

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \leqslant \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(2n-2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{5}{6}.$$

Absurde.

Salim Alloun