

CALCUL DE LA STRUCTURE ET DE LA GÉOMÉTRIE
DE CERTAINS GROUPES ENGENDRÉS
PAR DES AUTOMATES

Salim Alloun

Résumé

On s'intéresse à la structure sous-jacente de groupe engendré par des automates. On étudie un exemple de pavage apériodique d'un graphe de SCHREIER.

1 Analyser un groupe

La notion de groupe est un élément fondamental des mathématiques. Un groupe est la structure algébrique la plus simple à définir, et par conséquent possède une grande richesse loin d'être totalement explorée. Une façon d'étudier les groupes est d'explorer sa structure interne, trouver des sous-groupes, l'écrire comme un produit semi-direct...

On peut également adopter un point de vue géométrique afin de mettre en évidence les structures du groupe étudié.

1.1 Graphe de Schreier

Soit G un groupe généré par un ensemble S et agissant sur un ensemble X . Alors on peut s'intéresser au graphe de SCHREIER défini de la manière suivante : ses sommets sont les éléments de X et il y a une arête de x vers y étiquetée s , noté $x \xrightarrow{s} y$, si $y = s.x$. Les cas les plus simples sont les actions naturelles de G sur lui-même par translation (graphe de CAYLEY) ou conjugaison.

2 Groupe généré par un automate

Parmi la pléthore de groupes existants, certains sont plus ou moins simple à analyser. Les groupes finiment engendrés font de partie de la première catégorie. Un tel groupe G est toujours un quotient du groupe libre à n éléments (où G est engendré par n éléments) en rajoutant assez de relations entre les éléments découlant de la loi de composition de G . Cependant trouver ces relations n'est pas chose facile pour un groupe quelconque, il peut y en avoir une infinité. Un cas simple est lorsque l'on peut retranscrire ces relations, et donc définir un groupe, à l'aide d'un automate transducteur. Le groupe apparaîtra comme groupe agissant sur un ensemble de mots.

Cela se définit de la manière suivante : on considère un alphabet X et un automate. L'automate a un ensemble fini d'état S et il y a une fonction de transition s . Chaque transition possède un *label* indiquant le remplacement de la lettre lue par l'automate. Pour noter qu'en lisant x_1 à l'état s_1 on remplace x_1 par x_2 et on passe à l'état s_2 :

$$s_1 \xrightarrow{x_1|x_2} s_2 .$$

Ainsi, étant donné un mot $u = x_1 \dots$ à l'état initial s_1 , la première lettre du mot en sortie est x_2 , et ainsi de suite. Finalement, on définit par récurrence une fonction de X^* dans X^* pour chaque état initial $s \in S$. Dans le cas où chacune de ces fonctions est une bijection on peut définir G comme le groupe des bijections engendré par S qui agit donc naturellement sur X^* .

3 Pavages et problème de domino

Étant donné un graphe, on peut s'intéresser aux différents coloriages de ce graphe. Autrement dit, on s'intéresse étant donné un graphe Γ et un ensemble de couleurs A aux fonctions de $\Gamma \rightarrow A$. Le pavage d'un graphe correspond aux différents coloriages respectant des lois locales au graphe, par exemple deux sommets de même couleur ne peuvent pas être connectés. En pratique, on se donne un nombre fini de tuiles qui encodent ces lois locales. On peut en outre prendre en compte l'étiquetage des arêtes. Finalement, remarquons qu'un pavage selon un coloriage des sommets est équivalent à un coloriage des arêtes (si chaque sommet est de degré fini, ce qui est le cas pour un graphe de SCHREIER d'un groupe finiment généré).

Le problème de domino sur un graphe Γ se pose de la manière suivante : peut-on décider pour chaque ensemble de tuiles si Γ admet un pavage les respectant ? Si la réponse est oui alors le problème de domino est *décidable* sinon il est *indécidable*.

Théorème. Le problème de domino sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est indécidable.

Preuve. Cela découle de l'indécidabilité du problème de l'arrêt. En effet, on peut voir $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ comme *l'espace-temps* associé à une machine de TURING : une direction spatiale

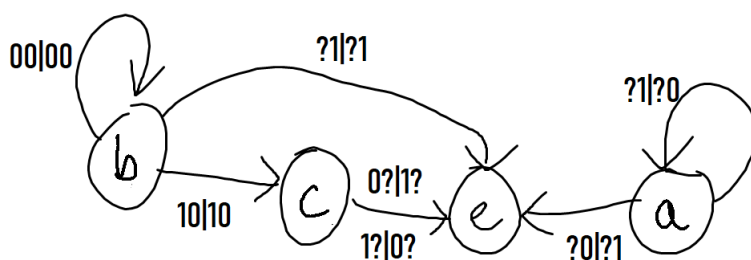
correspond à la bande infinie et l'autre à l'évolution temporelle de la machine. Le fait qu'une machine de TURING ait un nombre fini d'états et qu'elle ne se déplace que au maximum d'une case à chaque étape est en accord avec les lois locales d'un pavage. Autrement dit, à toute machine de TURING on peut lui associer un ensemble de tuiles sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, et avoir un certain pavage selon ces tuiles revient à dire que la machine de TURING s'arrête.

Problème du mot

Le lien avec les groupes se fait de la manière suivante. Un problème algorithmique qui se pose est le problème du mot. Étant donné un groupe G généré par un ensemble S , on considère un mot u de $(S \cup S^{-1})^*$ (c'est-à-dire $s_1^{n_1} \dots s_m^{n_m}$, où $n_i \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$) et on doit décider si u (en tant qu'élément de G) est égal au neutre de G .

Théorème. Si le problème de domino pour G est indécidable alors le problème du mot pour G est indécidable.

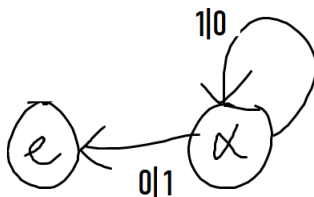
4 Exemple



Notons G le groupe défini par l'automate ci-dessus¹, engendré par $S := \{a, b, c\}$, agissant sur $X^* := \{0, 1\}^\infty \times \{0, 1\}^\infty$. On s'intéresse à Γ le graphe de l'orbite V de $v = (0^\infty, 0^\infty)$ sous l'action de G .

DÉTERMINATION DE V :

Posons $B : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^\infty$ telle que $B(n)$ est la représentation en binaire de n .

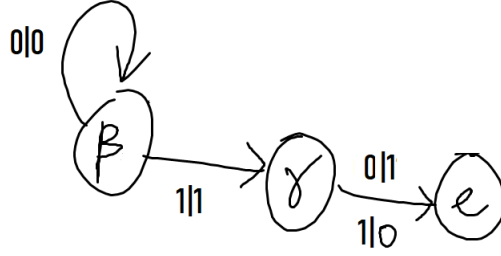


1. On écrit par exemple $0?|1?$ pour $01|11$ et $00|10$. e agit comme le neutre.

On a la relation de récurrence : $\alpha.B(n) = B(n + 1)$.

Ainsi l'orbite obtenue à partir de 0^∞ sous l'action de l'automate donne l'ensemble $\{B(n), n \in \mathbb{Z}\}$ où on étend B selon la relation de récurrence. $B(-1) = 1^\infty$, $B(-2) = 1^\infty 0, \dots$

Considérons l'orbite obtenue à partir de 0^∞ sous l'action de l'automate suivant :



β et γ sont des involutions différentes du neutre et $\beta.0^\infty = 0^\infty$. Ainsi l'orbite obtenue correspond au code de GRAY² dont les éléments sont notés $G(n)$ où $n \in \mathbb{N}$. Les relations sont $\beta.G(2n) = G(2n + 1)$ et $\gamma.G(2n + 1) = G(2n + 2)$.

On a que $a.(B(x), G(y)) = (B(x + 1), G(y))$, $b.(B(0), G(y)) = (B(0), \beta.G(y))$ et $c.(B(0), G(y)) = (B(0), \gamma.G(y))$.

Ainsi, on obtient avec $v(x, y) = (B(x), G(y))$ que $v(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \subset V$. L'inclusion réciproque vient du fait que $v(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ correspond aux couples formés d'une suite stationnaire à 1 ou 0 et d'une suite stationnaire à 0.

DÉTERMINATION DES ARÊTES :

1. $(B(x), G(2y + 1)) \xleftrightarrow{c} (B(x), G(2y))$.
2. Soit $y \neq 0$. Notons N_y la position du premier 1 dans $G(2y)$. Si $x = 0 (2^{N_y})$ alors

$$(B(x), G(2y + 1)) \xleftrightarrow{b} (B(x), G(2y)) .$$

3. Dans tous les autres cas l'action est triviale.

Preuve 2,3. Cela vient du fait que ou y reste dans la première boucle jusqu'à détecter un 1 dans la première coordonnée et dans ce cas l'action est triviale ou il détecte $(0, 1)$ et agit comme sur l'automate du code de GRAY donc avance de 1 sur la deuxième coordonnée. Et en effet pour détecter $(0, 1)$ il faut passer $N_y - 1$ fois dans la première boucle et ensuite avoir $(0, 1)$, c'est-à-dire que u doit être divisible par 2^{N_y} .

D'après la traduction $B(n) \mapsto G(n)$, N_y est également la position du premier 1 dans $B(y)$.

2. Voir annexe.

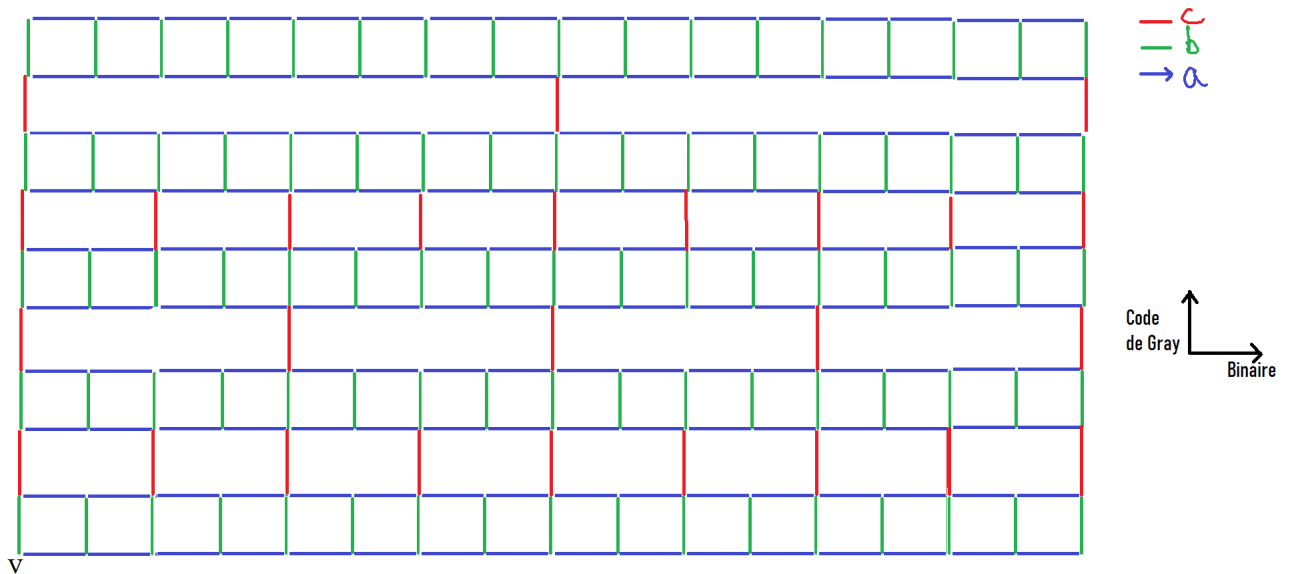
DÉTERMINATION DE N :

Notons $N = N_1 N_2 \dots N_k \dots$

$N_1 = 1$ et ensuite par récurrence

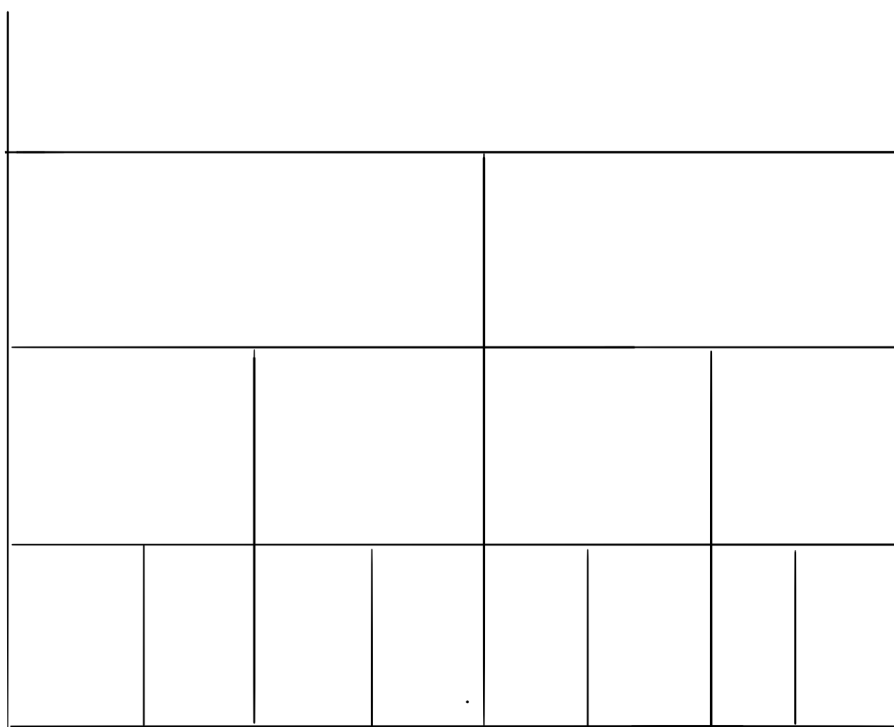
$$N_1 N_2 \dots N_{2^{k+1}} = (N_1 N_2 \dots N_{2^k})(N_1 N_2 \dots (N_{2^k} + 1)).$$

Par exemple : $N_1 = 1$. $N_1 N_2 = 12$. $N = 1213121412131215 \dots$. Et donc le début de Γ est le suivant :

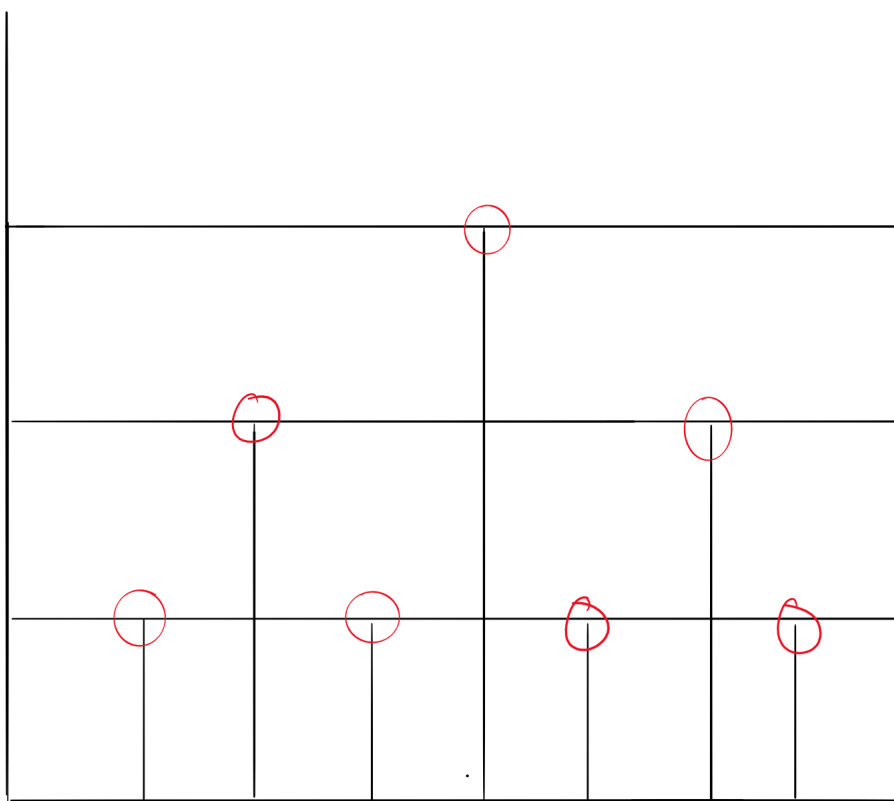


Le graphe de SCHREIER est donc **apériodique** puisque il existe des lignes horizontales de période minimale aussi grande que voulue.

Montrons que le problème de domino n'est pas décidable pour G . Pour cela, il suffit de retrouver à l'aide d'un pavage $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dans Γ . En fait, il suffit de retrouver le graphe hyperbolique \mathcal{H} défini de la manière suivante : c'est le mineur de la grille $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ où l'on garde un sommet une fois sur 2^n à la ligne n et les arêtes sont concaténées de telle sorte à éliminer ces sommets. Le début du graphe :



Le pavage n'a besoin que de marquer les sommets de \mathcal{H} entourés en rouge dans cette figure :



puisque les autres sommets de \mathcal{H} peuvent s'obtenir comme intersections de chemins horizontaux et verticaux issus des sommets rouges.

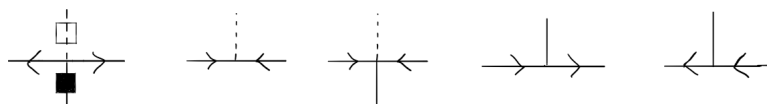
Pavage de Γ :

Étiquettes possibles des arêtes a : $<$, $>$, \times ou \circ .

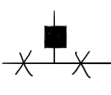
Étiquettes possibles des arêtes b : \blacksquare ou vide.

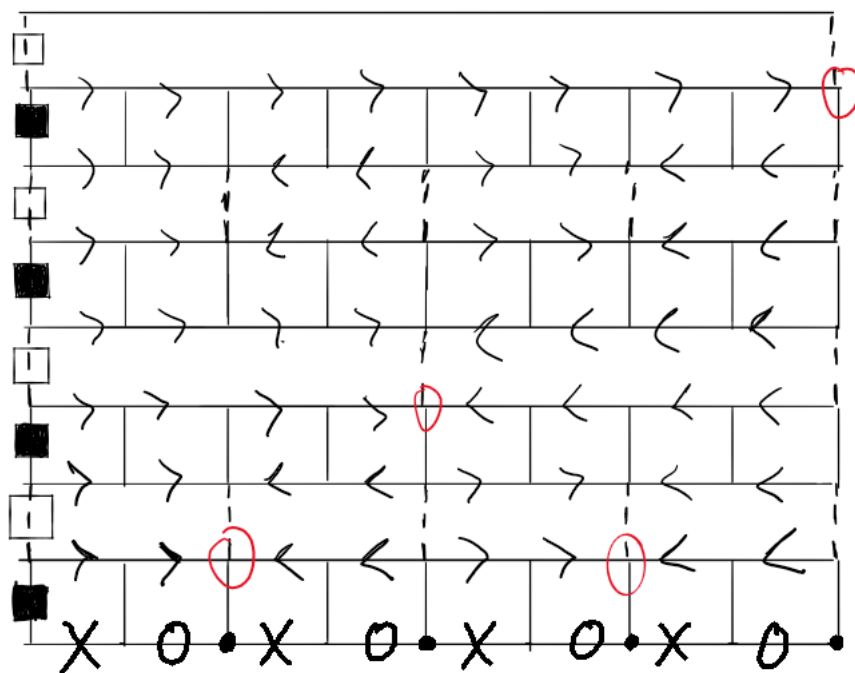
Étiquettes possibles des arêtes c : \square ou vide.

Patterns autorisés (i.e. choix de l'ensemble de tuiles) (Trait horizontal correspond à a ou a^{-1} . Trait vertical correspond à b . Trait vertical en pointillés correspond à c)



En ajoutant la loi locale suivante : \circ doit suivre un \times quand les arêtes verticales ne sont pas étiquetées.

En commençant par cette tuile : , on obtient le pavage :

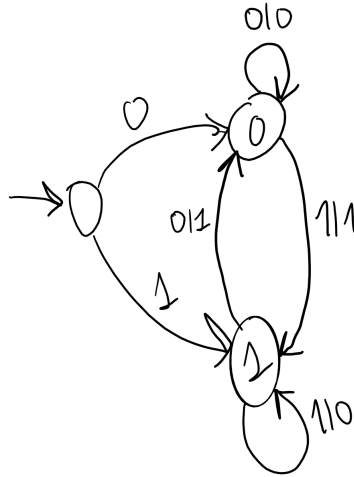


Les cercles rouges marquent le premier sommet rencontré sur une colonne avec le pattern $- > \cdot < -$, et ce une colonne sur deux, ce qui peut être fait grâce aux étiquettes \times et \circ .

Annexe : Code de Gray

Le code de GRAY est un codage des entiers naturels $G : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que le passage de $G(n)$ à $G(n+1)$ ne consiste qu'à changer un seul bit.

Traduction binaire \rightarrow GRAY :



Traduction GRAY \rightarrow binaire :

