

RAPPORT DE STAGE DE M1

Géométrie de la droite affine de Berkovich

Résumé

La géométrie algébrique a au fil des siècles a été approchée de différentes manières [1]. Elle s'est étendue à la fois en s'écartant de l'idée d'espace intuitif, en considérant tous les corps, et en se dévoilant selon des structures topologiques et algébriques de plus en plus générales. L'objectif de ce stage fut d'étudier dans le domaine de la géométrie analytique rigide les espaces définis par Berkovich [2] par comparaison avec les schémas définis par Grothendieck, en particulier l'exemple de la **droite affine**.

SALIM ALLOUN
ÉNS de Lyon

Encadrant : ANDREA PULITA
Institut Fourier, Grenoble

du 2 mai 2022 au 1er juillet 2022

SOMMAIRE

1	Théorie des schémas	3
1.1	Faisceaux	3
1.2	Schémas	6
2	Analyse non-archimédienne	8
2.1	Corps ultramétriques	8
2.2	Éléments analytiques	9
3	Géométrie de Berkovich	11
3.1	Exemple de la droite affine de Berkovich \mathbb{A}_1^{an}	13
3.1.1	Description des éléments de $\mathbb{D}^{\text{an}}(0, 1)$	13
3.1.2	La droite affine \mathbb{A}_1^{an} et sa topologie	14
3.1.3	Faisceau des fonctions analytiques sur \mathbb{A}_1^{an}	15

INTRODUCTION

Dès l'Antiquité grecque [1] les mathématiciens avaient déjà rencontré le monde de la géométrie algébrique. Dans l'optique d'extraire des racines, ils considéraient déjà des intersections de courbes. De même, les mathématiciens indiens [3] calculaient des approximations rationnelles des racines carrés d'entiers via les solutions entières de coniques. Ce n'est pourtant qu'au XVII^e siècle que se développa la géométrie analytique via Fermat et Descartes. Les courbes étaient désormais vues comme un ensemble de solutions à une équation. S'ensuivirent des travaux de classification des courbes algébriques, *i.e.* celles définies par des équations polynomiales, avec par exemple les fameux 72 types de cubiques découverts par Isaac Newton et publiés dans le *Lexicon Technicum* [4], dictionnaire précurseur de *l'Encyclopédie*.

Cette géométrie analytique correspondit donc à l'algébrisation que subit la géométrie pour la quelle désormais tous les problèmes se posèrent sous la forme d'équations. Sans être déjà bien définis, il fallait attendre Dedekind pour correctement le faire [5], les inconnus de ces équations étaient toujours "au plus" des nombres réels. Au XIX^e siècle cependant, ces derniers furent, en dehors de la physique, systématiquement remplacés par les nombres complexes. Les travaux de Riemann donnèrent ainsi naissance à la géométrie analytique complexe. La classification se fit à l'aide d'invariants topologiques tels le genre d'une surface pour les courbes algébriques projectives.

Ainsi au début du XX^e siècle, la notion d'espace sembla se résumer parfaitement dans la notion d'espace topologique et ce qui en découle comme les variétés. Développées lorsqu'il était prisonnier de guerre entre 1940 et 1945, puis reprises pour l'étude de la cohomologie par Serre [6] et Cartan [7], ce furent les notions de faisceaux qui s'imposèrent. Tout cela menant à la généralisation la plus aboutie — due à Grothendieck [8] : les schémas dont la structure fondamentale est celle d'espace localement annelé.

Ces abstractions permettent facilement de passer du corps des nombres complexes aux corps non-archimédiens notamment les corps p -adiques qui sont cruciaux dans l'étude de la théorie des nombres et des systèmes dynamiques, voire même considérés en physique théorique [9].

Ainsi, ce n'est qu'après avoir saisi les fondamentaux de la théorie des faisceaux, des schémas et de l'analyse non-archimédienne, que j'ai pu aborder les espaces de Berkovich.



PIERRE DE FERMAT



ALEXANDRE GROTHENDIECK



VLADIMIR BERKOVICH

1 Théorie des schémas

1.1 Faisceaux

La notion de faisceau permet de généraliser la notion de fonction sur un ensemble. Une fonction est définie ponctuellement et donc connaître une fonction sur un ensemble c'est exactement la connaître sur chacun de ses points. Prolonger une fonction n'est pas toujours évident, quand il s'agit de garder une propriété par exemple la continuité ou l'holomorphicité, mais on peut toujours la restreindre à un sous-ensemble. Dans la suite il faut donc voir les sections globales comme généralisant les fonctions, et le germe en un point comme généralisant la valeur en un point d'une fonction.

Les preuves non présentes ici se retrouvent dans [[10], II.1].

Définition 1.1. Un **préfaisceau** \mathcal{F} de groupes abéliens (d'anneaux, etc.) sur un espace topologique X est la donnée d'un groupe abélien (d'un anneau, etc.) $\mathcal{F}(U)$ pour chaque ouvert U de X , et d'un morphisme de groupes abéliens (d'anneaux, etc.) dit **de restriction** $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ pour chaque inclusion d'ouverts $V \subseteq U$, de sorte que si $W \subseteq V \subseteq U$ alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{F}(W) \end{array}$$

Autrement dit, en notant $\mathbb{T}(X)$ la catégorie dont les morphismes sont les inclusions entre les ouverts de X , un **préfaisceau** \mathcal{F} de groupes abéliens (d'anneaux, etc.) est un foncteur contravariant de $\mathbb{T}(X)$ vers la catégorie des groupes abéliens (des anneaux, etc.).

Un élément $s \in \mathcal{F}(U)$ est appelée **section** sur U . Pour $V \subseteq U$ inclusion d'ouverts, $s|_V$ est l'image de s par $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ et est appelée **restriction** de s à V . Les éléments de $\mathcal{F}(X)$ sont les **sections globales**.

Un **faisceau** \mathcal{F} sur X est un préfaisceau sur X tel que quelles que soient la famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de X , les sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ vérifiant $s_i|_{U_j} = s_j|_{U_i}$ pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe un unique $s \in \mathcal{F}(U)$, où $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, tel que pour tout $i \in I$, $s_i = s|_{U_i}$.

Remarque 1.1. Autrement dit, un faisceau est un préfaisceau tel que toute famille de sections compatible provient par restriction d'une unique section.

Définition 1.2. Un **morphisme** entre deux préfaisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} sur X est la donnée pour chaque ouvert U de X d'un morphisme¹ $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$.

Un **isomorphisme** est un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ qui admet un morphisme $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ dont les compositions $\varphi(U) \circ \psi(U)$ et $\psi(U) \circ \varphi(U)$ valent l'identité pour chaque ouvert U .

Soient \mathcal{F} un préfaisceau sur X et $x \in X$. On appelle **fibre** de \mathcal{F} en x , notée \mathcal{F}_x , l'ensemble des couples (U, s) où U est un voisinage ouvert de x et $s \in \mathcal{F}(U)$, quotienté par la relation d'équivalence

$$(U, s) \sim (V, \sigma) \iff \exists W \subseteq U \cap V \text{ voisinage ouvert de } x, s|_W = \sigma|_W$$

La projection d'une section s dans \mathcal{F}_x , notée s_x , est son **germe** en x .

1. de groupes abéliens, d'anneaux, etc.

Remarque 1.2. La fibre en x est également la limite directe des $\mathcal{F}(U)$, où U parcourt les voisinages ouverts de x , selon les morphismes de restriction.

Les fibres permettent de résumer pour des faisceaux (et non pour des préfaisceaux!) les informations purement locales du faisceau, notamment l'isomorphisme d'un morphisme comme on le voit dans le théorème suivante.

Propriété 1.1. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . Alors en chaque point $x \in X$, il existe un morphisme $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ tel que pour U un voisinage ouvert de x le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}_x \end{array}$$

De plus, φ est un isomorphisme entre faisceaux si et seulement si pour tout point $x \in X$, φ_x est un isomorphisme entre fibres.

Propriété 1.2. Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X . Il existe un unique faisceau à isomorphisme près, noté \mathcal{F}^+ , appelé **faisceautisé** de \mathcal{F} , muni d'un morphisme $\iota : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ tel que pour tout morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow & \vdots \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Preuve. L'unicité découle de la propriété universelle. Soit U un ouvert de X . Définissons $\mathcal{F}^+(U)$ de la manière suivante : c'est l'ensemble des fonctions s définies sur U telles que $s(x) \in \mathcal{F}_x$ et pour tout $x \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ ouvert de x et $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ tel que $\forall y \in V, s(y) = t_y$. \square

Définition 1.3. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X . En prenant sur chaque ouvert U de X le noyau $\ker \varphi(U)$, on définit en fait un faisceau appelé **faisceau noyau** de φ , noté $\ker \varphi$. On appelle **faisceau image** de φ , noté $\text{im } \varphi$, le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto \text{im}(\varphi(U))$.

$\ker \varphi$ est un exemple de **sous-faisceau** de \mathcal{F} , c'est-à-dire un faisceau \mathcal{H} tel que pour tout ouvert U de X , $\mathcal{H}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$. On vérifie à l'aide de la propriété universelle d'un faisceautisé que $\text{im } \varphi$ est naturellement un sous-faisceau de \mathcal{G} .

Finalement, une suite de morphismes entre faisceaux

$$\dots \mathcal{F}^{(i)} \xrightarrow{\varphi^{(i)}} \mathcal{F}^{(i+1)} \xrightarrow{\varphi^{(i+1)}} \mathcal{F}^{(i+2)} \dots$$

est dite **exacte** si pour tout i , $\ker \varphi^{(i+1)} = \text{im } \varphi^{(i)}$.

Généralisant la propriété 1.2, de nouveau l'exactitude des faisceaux se résume à celles des fibres :

Propriété 1.3. Soit une suite de morphismes entre faisceaux sur X

$$\dots \mathcal{F}^{(i)} \xrightarrow{\varphi^{(i)}} \mathcal{F}^{(i+1)} \xrightarrow{\varphi^{(i+1)}} \mathcal{F}^{(i+2)} \dots$$

Alors pour tout $x \in X$, en découle naturellement une suite de morphismes entre les fibres correspondantes

$$\dots \mathcal{F}_x^{(i)} \xrightarrow{\varphi_x^{(i)}} \mathcal{F}_x^{(i+1)} \xrightarrow{\varphi_x^{(i+1)}} \mathcal{F}_x^{(i+2)} \dots$$

La suite des faisceaux est exacte si et seulement si pour tout $x \in X$, la suite des fibres en x est exacte.

Définition 1.4. Soient $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue, \mathcal{F} un faisceau sur X et \mathcal{G} un faisceau sur Y . On appelle **poussé en avant** de \mathcal{F} par f , noté $f_*\mathcal{F}$, le préfaisceau sur Y défini par $V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$; c'est en fait un faisceau. On appelle **image inverse** de \mathcal{G} par f , noté $f^{-1}\mathcal{G}$, comme le faisceautisé du préfaisceau sur X défini par $U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$.

Soit $Z \subseteq X$. La **restriction** de \mathcal{F} à Z , notée $\mathcal{F}|_Z$, est $\iota^{-1}\mathcal{F}$ où $\iota : Z \rightarrow X$ est l'inclusion.

1.2 Schémas

Définition 1.5. Un *espace localement annelé* est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux locaux noté \mathcal{O}_X et appelé *faisceau structurel*.

Un *morphisme d'espaces localement annelés* entre X et Y est une paire $(f, f^\#)$ où $f : X \rightarrow Y$ est continue et $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ un morphisme de faisceaux sur Y telle que pour tout $x \in X$, $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{X,x}$ est un *morphisme local*, cette dernière condition revenant (en notant \mathfrak{p}_z l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,z}$) à ce que $(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.

Définition 1.6. Soit R un anneau. On appelle *spectre* de R , noté $\text{Spec } R$, l'ensemble des idéaux premiers de R muni de la topologie, dite *de Zariski*, dont les fermés sont les $F(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$ où \mathfrak{a} est un idéal de R . Il est toujours muni du faisceau structurel défini de la manière suivante : soit U un ouvert de $\text{Spec } R$, l'ensemble des sections sur U est l'ensemble des fonctions s définies sur U telles que

- a) $\forall \mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}}$.
- b) $\forall \mathfrak{p} \in U$, il existe $V \subset U$ voisinage de \mathfrak{p} et $a, b \in R$ tels que $\forall \mathfrak{q} \in V, b \notin \mathfrak{q}$ et $s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b}$.

Remarque 1.3. Comme expliqué au début de 1.1, le spectre de R est, comme son nom l'indique, l'espace topologique qui se cache derrière R . C'est l'espace sur lequel R est naturellement un anneau de fonctions. Plus précisément, on montre que l'anneau des sections globales est exactement R . De cette correspondance on déduit des propriétés sur l'anneau à partir du spectre et vice-versa.

Soient R, S deux anneaux et $\varphi : R \rightarrow S$ un morphisme d'anneaux. Alors je peux définir un morphisme d'espaces localement annelés de $\text{Spec } R$ vers $\text{Spec } S$. Je définis donc

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Spec } S &\longrightarrow \text{Spec } R \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie puisque la préimage d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal, et pour $\mathfrak{q} \in \text{Spec } S$, si $ab \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ alors $\varphi(ab) \in \mathfrak{q}$ donc $\varphi(a)\varphi(b) \in \mathfrak{q}$ donc $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$ ou $\varphi(b) \in \mathfrak{q}$ (car \mathfrak{q} est premier), et donc $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ou $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$; c'est-à-dire $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \text{Spec } R$. Si \mathfrak{a} un idéal de R alors $\Phi^{-1}(F(\mathfrak{a})) = F(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$, et donc la préimage d'un fermé est fermé : Φ est continue.

Pour $\mathfrak{q} \in \text{Spec } S$, je localise le morphisme φ et obtiens un morphisme entre anneaux locaux

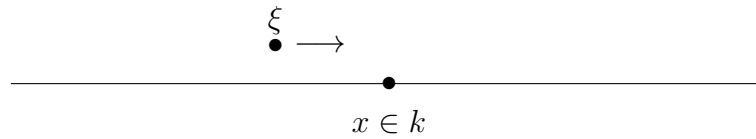
$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{q}} : R_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} &\longrightarrow S_{\mathfrak{q}} \\ a/t &\longmapsto \varphi(a)/\varphi(t) \end{aligned}$$

On vérifie qu'il est bien local. Finalement, le morphisme $\Phi^\#$ entre les faisceaux structurels sur l'espace topologique de $\text{Spec } R$ (celui de $\text{Spec } R$ vers le poussé en avant via Φ de celui de $\text{Spec } S$) est défini pour chaque ouvert via les $\varphi_{\mathfrak{q}}$, définition légitime puisque les sections sont des fonctions à valeurs dans les fibres. On vérifie bien que $\Phi_{\mathfrak{q}}^\# = \varphi_{\mathfrak{q}}$, et donc cela fait de $(\Phi, \Phi^\#)$ est un morphisme d'espaces localement annelés.

Théorème 1.1. Tout morphisme d'espace localement annelé $\text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$ est issu d'un morphisme d'anneaux $R \rightarrow S$.

Preuve. [[10], II.2.3] □

Exemple 1.1. Soit k un corps algébriquement clos. Comme $k[X]$ est principal, ce qu'on appelle la **droite affine** $\mathbb{A}_1(k) := \text{Spec } k[X]$ est composé des $(X - x)$, où $x \in k$, et (0) , autrement dit assimilé à $k \cup \{\xi\}$ où $\xi = (0)$ est ce qu'on appelle un **point générique** de la droite, c'est-à-dire tel que $\{\xi\}$ est dense dans $\text{Spec } k[X]$. C'est comme si ce point parcourait la droite, il est partout à la fois.



Les ouverts de $\mathbb{A}_1(k)$ sont les complémentaires des $F((f))$, où f est un polynôme de $k[X]$, car $k[X]$ est principal. Comme k est algébriquement clos, les $F((f))$ sont en bijection avec les parties finies de k . Tous les ouverts de $\mathbb{A}_1(k)$ sont donc de la forme $\{\xi\} \cup \{x \in k, f(x) \neq 0\}$, où $f \in k[X]$.

Définition 1.7. Soit X un espace localement annelé. On note $k(x)$ le corps résiduel de l'anneau local $O_{X,x}$.

Définition 1.8. Un espace localement annelé est dit **schéma affine** s'il est isomorphe au spectre d'un anneau. On dit que c'est un **schéma** si tout point de l'espace topologique sous-jacent admet un voisinage ouvert qui, muni de la restriction du faisceau structurel, est un schéma affine. **Un morphisme de schémas** est un morphisme d'espaces localement annelés entre schémas.

Remarque 1.4. Les schémas affines sont aux schémas ce que les cartes sont aux variétés.

Exemple 1.2. Soient X un schéma et k un corps. Alors un morphisme de schémas $\text{Spec } k \rightarrow X$ est associé à un point $x \in X$ et un plongement de corps $k(x) \rightarrow k$. En effet, soit $f : \text{Spec } k \rightarrow X$ un morphisme de schémas. Alors $\text{Spec } k$ est réduit à un seul point, je pose donc $f(\{0\}) = x$. Les sections globales de $\text{Spec } k$ sont les germes en son seul point, et donc la fibre y est égal à k . Je dispose d'un morphisme local $O_{X,x} \rightarrow k$. Or l'idéal maximal est nul donc la localité du morphisme dit que son noyau est exactement \mathfrak{m}_x , d'où la flèche injective $k(x) \rightarrow k$.

2 Analyse non-archimédienne

Les preuves absentes ici se retrouvent dans [11], chapitre II.

2.1 Corps ultramétriques

Définition 2.1. Une **semi-norme** sur un anneau R (toujours supposé commutatif) est une application $|\cdot| : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $|f + g| \leq |f| + |g|$ et $|fg| \leq |f| \cdot |g|$. Elle est dite **multiplicative** si $|fg| = |f| \cdot |g|$, et appelée **norme** si $|f| = 0 \iff f = 0$. Elle est **ultramétrique** si $\forall x, y \in K, |x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Un anneau R muni d'une norme est toujours muni de la métrique issue de la distance $d(x, y) = |x - y|$. Un **anneau de Banach** est un anneau muni d'une norme et complet pour cette dernière.

Une norme multiplicative sur un anneau R est appelé **valeur absolue**. Un anneau muni d'une valeur absolue ultramétrique est dit **ultramétrique**.

Un plongement d'un corps ultramétrique K dans un corps ultramétrique F est un morphisme de corps injectif qui fait de la valeur absolue de F un prolongement de celle de K . $F|K$ est dans cas appelée **extension de corps ultramétriques**, ou tout simplement **extension**.

Exemple 2.1. Sur \mathbb{Q} il y a au moins la valeur absolue usuelle et les normes dites **p -adiques** définies pour p un nombre premier par $|a/b| = p^{\text{val}_p(a) - \text{val}_p(b)}$ où a/b est une fraction irréductible et $\text{val}_p(n)$ est le nombre de facteurs p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Les p -adiques sont non-archimédiennes, et à une exponentiation près (c'est-à-dire un changement de la valeur de $|p|_p$) elles sont toutes de cette forme [[12], 2.2.4].

Remarque 2.1. Un anneau R possédant une valeur absolue est intègre, et donc définir une valeur absolue sur le corps des fractions de R revient à définir une valeur absolue sur R ; c'est ce qui a été fait au-dessus pour \mathbb{Z} .

Un anneau muni d'une valeur absolue est dit **archimédien** si la valeur absolue n'est pas ultramétrique, par exemple la valeur absolue usuelle sur \mathbb{Q}, \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Les autres sont donc dits **non-archimédiens**. En général, les corps ultramétriques étudiés sont non-archimédiens (comme présentés ci-dessous, typiquement \mathbb{Q}_p et ses extensions) mais on pourrait également considérer les concepts de la section 3. avec des corps archimédiens comme fait dans [13]. Ainsi les semi-normes sont toutes supposées ultramétriques.

Propriété 2.1. Soit R un anneau muni d'une semi-norme ultramétrique. Alors

- a) $\forall x, y \in R$ tels que $|x| > |y|, |x + y| = |x|$
- b) $\forall x_1, \dots, x_n \in R$ dont un x_i a une valeur absolue strictement plus grande que les autres,

$$|x_1 + \dots + x_n| = |x_i|$$

Preuve. a) Si $|x| > |y|$ alors $|x| \leq |x + y - y| \leq \max(|x + y|, |y|)$, donc que $|x| \leq |x + y|$, et $|x + y| \leq \max(|x|, |y|) = |x|$. La preuve de b) découle d'une récurrence de la propriété a). \square

Propriété 2.2. Soit K un corps ultramétrique. Alors

- a) En notant $O_K := \{x \in K, |x| \leq 1\}$ et $\mathfrak{p}_K := \{x \in K, |x| < 1\}$, O_K est un anneau local d'idéal maximal \mathfrak{p}_K .

O_K est appelé **anneau des entiers** de K et $\bar{K} := O_K/\mathfrak{p}_K$ est le **corps résiduel** de K .

- b) Notons \widehat{K} le complété de K . Alors c'est un naturellement un corps et il existe une unique valeur absolue sur \widehat{K} qui étend celle de K .

c) Notons K^{alg} une clôture algébrique de K . Alors il existe une unique valeur absolue sur K^{alg} qui étend celle de K , elle est donnée pour $x \in K^{\text{alg}}$ par

$$|x| = \sqrt{[K(x):K] |N_{K(x)|K}(x)|}$$

d) Supposons K complet. Alors une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de K est convergente si et seulement si $a_{n+1} - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En particulier, une série converge si et seulement si le terme général tend vers 0.

Exemple 2.2. On note \mathbb{Q}_p , appelé **corps des nombres p -adiques**, le complété de \mathbb{Q} pour la norme p -adique.

Pour disposer de tous les nombres nécessaires, on procède de la manière suivante : étant donné un corps K on se place dans $\widehat{K^{\text{alg}}}$, le complété de la clôture algébrique de K .

Théorème 2.1. (de Krasner) Soit K un corps ultramétrique. Alors $L := \widehat{K^{\text{alg}}}$ est algébriquement clos.

Preuve. [[11], 4.4.2] □

Remarque 2.2. On note \mathbb{C}_p le corps L dans le cas où $K = \mathbb{Q}_p$. Il est appelé **corps des nombres complexes p -adiques** car en fait il est isomorphe à \mathbb{C} (via à un isomorphisme de corps! mais non canonique [[12], 3.3.4]).

L est donc un corps assez gros, mais dans certains cas pas assez. Par exemple, le **groupe des valeurs absolues** de K , noté $|K| := \{|x|, x \in K \setminus \{0\}\}$, est dans le cas de \mathbb{Q}_p égal à $p^{\mathbb{Z}}$, de $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$ et \mathbb{C}_p égal à $p^{\mathbb{Q}}$. Le corps \mathbb{C}_p admet par exemple une extension Ω_p telle que $|\Omega_p| = \mathbb{R}^{\times}$ [[12], 3.2]. Cela provient du fait que \mathbb{C}_p n'est pas sphériquement complet, une condition plus forte que celle de la complétude.

Définition 2.2. Un corps ultramétrique K est dit **sphériquement complet** si l'intersection de toute suite décroissante de disques non vides est non vide.

Propriété 2.3. Soient K un corps ultramétrique sphériquement complet et $(D_i)_{i \in I}$ une famille de disques dont l'intersection de chaque paire de disques est non vide. Alors $\bigcap_{i \in I} D_i \neq \emptyset$.

2.2 Éléments analytiques

Soit $(K, |\cdot|)$ un corps ultramétrique complet et algébriquement clos, de caractéristique nulle (toujours le cas dans la suite).

Définition 2.3. Soient $a \in K$ et $r \in \mathbb{R}_+$. La **semi-norme de Gauß** en a de rayon r est définie pour un polynôme $f(z) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ (avec un nombre fini de coefficients non nuls) par $|f|_a(r) = \sup_{n \geq 0} a_n r^n$.

Le disque $\{z \in K, |z - a| \leq r\}$ est noté $D(a, r)$, et le disque **strict** $\{z \in K, |z - a| < r\}$ est noté $D_{<}(a, r)$.

Propriété 2.4. [[11], II.5.1.2] Les semi-normes de Gauß sont multiplicatives, sont des normes pour $r > 0$, et pour tout b tel que $|b - a| \leq r$,

$$|\cdot|_a(r) = |\cdot|_b(r)$$

L'anneau $K[X]$ n'est pas complet pour les normes de Gauß, en le complétant on obtient l'anneau des séries entières convergentes sur un disque. En notant $\mathcal{A}_a(r)$ l'anneau des séries entières convergentes sur $D(a, r)$, l'anneau des polynômes $K[X]$ y est dense pour la semi-norme $|\cdot|_a(r)$ qui se prolonge par la même formule.

Propriété 2.5. *[[11], II.5.1.4] Soit $f \in K[X]$. Alors l'application $r \mapsto |f|_a(r)$ est continue et croissante.*

Propriété 2.6. *[[11], II.5.1.5] Soient $f \in K$ et $r \in |K|$. Alors*

$$|f|_a(r) = \max_{b \in K, |b-a|=r} |f(b)|$$

Théorème 2.2. *[[11], II.5.5.11] $\mathcal{A}_a(r)$ est principal et chaque idéal est engendré par un polynôme. En particulier ses idéaux premiers sont de la forme $(X - b)$, où $b \in K$.*

3 Géométrie de Berkovich

Définition 3.1. Une fonction $\varphi : R \rightarrow S$ entre deux anneaux munis d'une semi-norme est dite **bornée** s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in R$, $|\varphi(f)|_S \leq C|f|_R$.

L'anneau \mathbb{R} est toujours muni de la norme usuelle.

Soit $(R, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. L'**espace de Berkovich** de R , noté $\mathcal{M}(R)$, est l'ensemble des semi-normes non triviales multiplicatives bornées sur R . Un point x de cet espace est également noté $|\cdot|_x$. L'espace $\mathcal{M}(R)$ est muni de la topologie la plus grossière rendant pour tout $f \in R$, l'application $x \mapsto |f|_x$ continue.

Lemme 3.1. Soit $\varphi : R \rightarrow S$ un morphisme d'anneaux bornés entre des anneaux munis de semi-normes et telle que celle de S soit multiplicative. Alors $|\varphi(f)|_S \leq |f|_R$.

Preuve. En effet, si on note $C > 0$ la constante associée à φ alors pour tout $f \in R$, $|\varphi(f^n)|_S \leq C|f^n|_R$, c'est-à-dire par multiplicativité $|\varphi(f)|_S \leq C^{1/n}|f|_R$, et $n \rightarrow \infty$ donne $C^{1/n} \rightarrow 1$. \square

Propriété 3.1. Soit R un anneau de Banach. Notons pour $x \in \mathcal{M}(R)$, $\mathfrak{p}_x := \{f \in R, |f|_x = 0\}$. Ce sont des idéaux premiers de R et l'application $\pi : \mathcal{M}(R) \rightarrow \text{Spec } R$ qui en découle est continue.

Preuve. Démontrons que \mathfrak{p}_x est un idéal premier. L'inégalité triangulaire de la semi-norme x donne la stabilité par addition de \mathfrak{p}_x , la multiplicativité donne sa stabilité par multiplication externe et par $f \mapsto -f$. \mathfrak{p}_x est premier car $\|fg\| = 0$ implique par multiplicativité que $|f|_x|g|_x = 0$, c'est-à-dire $|f|_x = 0$ ou $|g|_x = 0$.

Je montre que l'image réciproque par π d'un fermé est un fermé. Soit $F = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$, où \mathfrak{a} est un idéal de R . $\pi^{-1}(F) = \{x, \forall f \in \mathfrak{a}, |f|_x = 0\} = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} \{x, |f|_x = 0\}$ est une intersection de fermés, comme images réciproques par une application continue du fermé $\{0\}$, donc fermé. \square

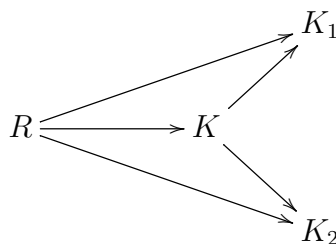
Remarque 3.1. De plus, d'après le lemme 3.1, pour tout $x \in \mathcal{M}(R)$, $|\cdot|_x \leq \|\cdot\|$. Ce qui implique que les \mathfrak{p}_x sont des idéaux fermés. L'inégalité \leq entre les semi-normes définit une relation d'ordre entre les points de $\mathcal{M}(R)$ pour laquelle la norme de R est maximale. De plus, si $x \leq y$ alors $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_x$. Il est donc convenable de s'approprier l'image mentale pour \mathcal{R} d'une pyramide dont le sommet est la norme de R .

Si R est un anneau de fonctions par exemple $K[X]$ alors pour $x \in K$ $f \mapsto |f(x)|$ est une semi-norme multiplicative. La proposition suivante montre que tous les anneaux de Banach peuvent être vus comme des anneaux de fonctions sur $\mathcal{M}(R)$.

Il s'agit donc de construire pour chaque point $x \in \mathcal{M}(R)$ un morphisme d'anneaux $f \mapsto f(x)$ à valeurs dans un corps ultramétrique tel que $|f(x)| = |f|_x$. Parce que $|\cdot|_x$ est bornée, ce morphisme sera lui aussi borné.

Définition 3.2. Un **caractère** d'un anneau de Banach R est un morphisme d'anneaux borné $R \rightarrow K$, où K est un corps ultramétrique complet.

Deux caractères $R \rightarrow K_1, R \rightarrow K_2$ sont dits **équivalents** s'il existe un autre caractère $R \rightarrow K$ et deux plongements $K \rightarrow K_1$ et $K \rightarrow K_2$ tels que le diagramme suivant est commutatif



On vérifie que cela définit effectivement une relation d'équivalence sur les caractères de R .

Remarque 3.2. Pour chaque caractère $R \longrightarrow K$, on peut en considérer un nouveau en plongeant K dans une de ses extensions. On comprend bien qu'on n'a pas affaire à un caractère « véritablement différent », c'est pourquoi il faut considérer les classes d'équivalence de caractères. En pratique on considèrera toujours un caractère bien défini — le plus petit en quelque sorte.

Propriété 3.2. Soit R un anneau de Banach. Alors $\mathcal{M}(R)$ est en bijection avec les classes d'équivalence de caractères de R .

Preuve. Soit $\varphi : (R, \|\cdot\|) \longrightarrow (K_1, |\cdot|_1)$. Soit x défini par $|\cdot|_x : f \mapsto |\varphi(f)|_1$. C'est une semi-norme multiplicative bornée :

- $|\varphi(f+g)|_1 = |\varphi(f) + \varphi(g)|_1 \leq \max(|\varphi(f)|_1, |\varphi(g)|_1)$.
- $|\varphi(fg)|_1 = |\varphi(f)\varphi(g)|_1 = |\varphi(f)|_1|\varphi(g)|_1$
- D'après le lemme 3.1, pour tout $f \in R$, $|\varphi(f)|_1 \leq \|f\|$ car φ est borné, c'est-à-dire $\forall f \in R, |f|_x \leq \|f\|$.

Soit un autre caractère $\varphi_2 : R \longrightarrow (K_1, |\cdot|_1)$ équivalent à φ_1 via le caractère $\varphi : R \longrightarrow K$. Soit $f \in R$. Alors $K_1|K$ étant une extension de corps ultramétriques

$$|\varphi(f)| = \underbrace{|\varphi(f)|_1}_{\in K_1}$$

et $|\varphi(f)|_1 = |\varphi_1(f)|_1 = |f|_x$ par commutativité du diagramme dans la définition 3.2. De même $|\varphi(f)| = |\varphi_2(f)|_2$.

Par conséquent, une classe d'équivalence de caractère définit bien un point de $\mathcal{M}(R)$.

Soit $x \in \mathcal{M}(R)$. Alors je dispose dans l'ordre :

- De la projection quotient $R \longrightarrow R/\mathfrak{p}_x$: qui définit naturellement sur R/\mathfrak{p}_x une fonction $|\cdot|$ par $|\bar{a}| = |a|_x$, définition légitime puisque si $a - b = c \in \mathfrak{p}_x$ alors ou $|a|_x \neq 0$ et d'après la propriété a) de 2.1, $|b|_x = |a|_x$, ou $|a|_x = 0$ et $|b|_x \leq \max(|a|_x, |b|_x) = 0$ donc $|b|_x = 0$. On vérifie bien que $|\cdot|$ est une valeur absolue ultramétrique.
 - De l'inclusion $R/\mathfrak{p}_x \longrightarrow \text{Frac}(R/\mathfrak{p}_x)$ (\mathfrak{p}_x étant premier, le quotient est intègre) : la remarque 2.1 rappelle que la valeur absolue se prolonge sur le corps des fractions.
 - De l'inclusion $\text{Frac}(R/\mathfrak{p}_x) \longrightarrow \widehat{\text{Frac}(R/\mathfrak{p}_x)}$: bien défini d'après le b) de 2.2
- Ainsi toutes ces flèches étant des morphisme d'anneaux, il en suit que leur composition donne un morphisme $R \longrightarrow \mathcal{K}(x)$, où $\mathcal{K}(x) := \widehat{\text{Frac}(R/\mathfrak{p}_x)}$ est bien un corps ultramétrique complet. Pour que l'on sache que c'est un caractère, il reste à vérifier que ce morphisme est borné. Cela découle directement du fait que la semi-norme $|\cdot|_x$ est plus petite que la norme $\|\cdot\|$ de R .

Finalement on vérifie que les applications

$$\mathcal{M}(R) \longleftrightarrow \{\text{classes d'équivalence de caractères de } R\}$$

sont bien inverses l'une de l'autre.

□

On note donc $f(x)$ la projection de f via $R \longrightarrow \mathcal{K}(x)$. On construit **la transformation de Gelfand**²

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow \prod_{x \in \mathcal{M}(R)} \mathcal{K}(x) \\ f &\longmapsto \widehat{f} = (f(x))_{x \in \mathcal{M}(R)} \end{aligned}$$

2. Le produit est l'anneau des suites bornées muni de la norme infinie, transformation donc bien définie puisque $\forall f \in R, |f(x)| \leq \|f\|$.

La considérer permet notamment de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. *[[2], 1.2.1] Soit R un anneau de Banach. Alors $\mathcal{M}(R)$ est un espace compact séparé.*

3.1 Exemple de la droite affine de Berkovich \mathbb{A}_1^{an}

Dans la suite, $(K, |\cdot|)$ est un corps non-archimédien sphériquement complet et algébriquement clos.

Rappelons que $\mathcal{A}_a(r)$ est a priori muni de la norme $|\cdot|_a(r)$ et on note $\mathbb{D}^{\text{an}}(a, r) := \mathcal{M}(\mathcal{A}_a(r))$ le **disque analytique** de centre a de rayon $r > 0$.

3.1.1 Description des éléments de $\mathbb{D}^{\text{an}}(0, 1)$

Théorème 3.2.

$$\mathbb{D}^{\text{an}}(0, 1) = \{ |\cdot|_a(r) \mid a \in D(0, 1), r \in [0, 1] \}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{D}^{\text{an}}(0, 1)$, et notons $r := \inf_{b \in K} |X - b|_x$. Je montre que c'est un minimum atteint en un point a et que $|\cdot|_x = |\cdot|_a(r)$.

Premièrement, pour tout $b \in K \setminus \{0\}$, $|b|_x \leq |b|_0(1) = |b|$ et $|b^{-1}|_x \leq |b^{-1}|$ ce qui donne par multiplicativité de $|\cdot|_x$, $|b|_x \geq |b|$. Par conséquent la semi-norme $|\cdot|_x$ étend la valeur absolue de K .

Je note $E_b = \{c \in K, |X - c|_x \leq |X - b|_x\}$ où $b \in K$. L'existence d'un minimum revient à trouver que l'intersection des E_b est non vide. Clairement si c est parmi b, b' celui tel que $|X - c|_x$ est plus petit, alors $c \in E_c = E_b \cap E_{b'}$. Les disques $D_b = D(b, |X - b|_x)$ sont inclus chacun dans E_b . Par ce qui précède, $D_b \cap D_{b'} \neq \emptyset$. K étant sphériquement complet, la propriété 2.3 implique que $\bigcap_b D_b$ est non vide. D'où l'existence d'un $a \in K$ tel que $|X - a|_x = r$.

Soit $b \in K$. Alors $|X - b|_x = |X - a + a - b|_x$ et donc si $|a - b| > r$ alors

$$|X - b|_x = \max(|X - a|_x, |a - b|) = \max(r, |b - a|) = |X - b|_a(r)$$

et si $|a - b| \leq r$ alors

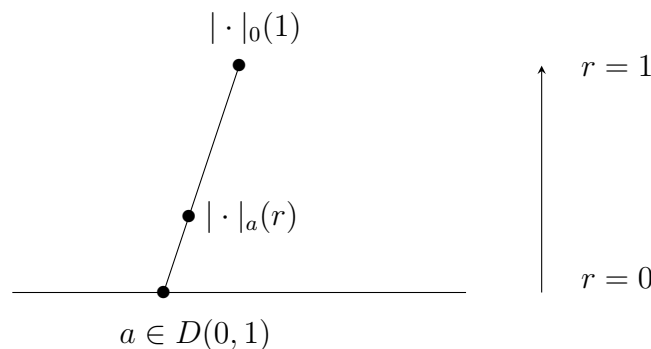
$$|X - b|_x \leq \max(|X - a|_x, |a - b|) = r$$

mais on a également $|X - b|_x \geq r$ d'où $|X - b|_x = r = |X - b|_a(r)$.

Finalement, K étant algébriquement clos, chaque polynôme de R est produit de monômes. Donc par multiplicativité de x , la semi-norme $|\cdot|_x$ coïncide avec $|\cdot|_a(r)$ sur les polynômes. En particulier, pour X cela donne $\max(r, |a|) = |X|_a(r) = |X|_x \leq |X|_0(1) = 1$. Puis la densité des polynômes dans R pour la norme $|\cdot|_0(1)$ à laquelle $|\cdot|_x$ est inférieure, donne l'égalité $\boxed{|\cdot|_x = |\cdot|_a(r)}$.

□

Remarque 3.3. *Quand $|\cdot|_x$ est une norme, a est défini comme si c'était une projection de X (qui engendre la K -algèbre de Banach $K[[X]]$) sur K dans la K -algèbre de Banach $(K[[X]], |\cdot|_x)$, une projection à distance r mais non unique car a peut être remplacé par n'importe quel élément de $D(a, r)$.*



D'après le théorème 2.2, $A_0(1)$ est principal et la description de ses idéaux montre qu'on peut identifier $\text{Spec } A_0(1)$ à $\text{Spec } K[X]$. Via la projection $\mathcal{M}(A_0(1)) \rightarrow \text{Spec } A_0(1)$ les normes sont les préimages du point générique ξ (cf. 1.1). Dans la figure il faut donc cette fois-ci s'imaginer le point générique parcourant tous les points du disque via les points où $0 < r \leq 1$. D'après la propriété 2.5, $r \mapsto |\cdot|_a(r)$ est bien un chemin continu dans $\mathbb{D}^{\text{an}}(0, 1)$. En particulier, $\mathbb{D}^{\text{an}}(0, 1)$ est connexe par arcs. Naturellement, on a une description similaire pour $\mathbb{D}^{\text{an}}(a, r)$, où $r > 0$ et $a \in K$.

3.1.2 La droite affine \mathbb{A}_1^{an} et sa topologie

Ainsi, on définit la droite affine analytique de Berkovich \mathbb{A}_1^{an} par l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $K[X]$ muni de la topologie rendant les $f \mapsto |f|_x$ continues. Les calculs du théorème 3.2 impliquent que ce sont toutes des semi-normes de Gauß. Et il en suit que \mathbb{A}_1^{an} est la réunion des disques $\mathbb{D}^{\text{an}}(a, r)$ qui s'identifient naturellement à des sous-ensembles de \mathbb{A}_1^{an} .

Au delà de l'égalité ensembliste, les disques sont bien tous plongés dans \mathbb{A}_1^{an} , puisque $\mathbb{D}(a, r) \rightarrow \mathbb{A}_1^{\text{an}}$ est continue si les $\mathbb{D}(a, r) \rightarrow \mathbb{A}_1^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto |f(x)|$ sont continues pour tout polynôme de $K[X]$, ce qui est le cas par définition de $\mathbb{D}(a, r)$, et c'est donc une injection d'un compact – d'après le théorème 3.1 – donc bien un plongement. En particulier \mathbb{A}_1^{an} est connexe par arcs et σ -compact car

$$\mathbb{A}_1^{\text{an}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}^{\text{an}}(0, n)$$

Ici les hypothèses sur K permettent finalement d'identifier chaque point de \mathbb{A}_1^{an} avec un disque de K , et la relation d'ordre entre les semi-normes correspond à l'inclusion des disques. Si K n'était pas sphériquement complet alors il aurait fallu également considérer toutes les familles de disques emboîtés, même si donc elles auraient pu avoir une intersection vide.

Une base d'ouverts de \mathbb{R}_+ est formée des $[0, s[$, $]s, +\infty[$ et $]r, s[$ où $s > 0$. Ainsi une base d'ouverts de $\mathcal{M}(R)$ est formée par les $|f|^{-1}[0, s[$, $|f|^{-1}]s, +\infty[$ et $|f|^{-1}]r, s[$, où $r, s > 0$ et $f \in R$. Elle est analogue aux ouverts de l'exemple 1.1, mais plus précise puisque cette fois-ci on dispose de la topologie de \mathbb{R} .

Propriété 3.3. Avec l'identification $a \mapsto |\cdot|_a(0)$, K est dense dans \mathbb{A}_1^{an} .

Preuve. Soit $|\cdot|_a(r)$ tel que $|f|_a(r) > t$.

K est algébriquement clos donc d'après la propriété c) de 2.2, $|K|$ est dense dans \mathbb{R}^{\times} ³. Par continuité de $u \mapsto |f|_a(u)$, on peut choisir $r' \in |K|$ tel que $|f|_a(r') > t$. C'est ici que j'utilise la

3. Si K est une extension de \mathbb{Q}_p par exemple les valeurs absolues de toutes les racines et exponentiations de p donne un sous-groupe dense de \mathbb{R}^{\times}

propriété 2.6 pour s'assurer qu'il existe un point $b \in D(a, r')$ tel que $|f(b)| = |f|_a(r') > t$. Et donc K intersecte l'ouvert $\{|f(x)| > t\}$.

De la même manière on démontre que K intersecte les ouverts $\{|f(x)| < s\}$ et $\{t < |f(x)| < s\}$. \square

Notons pour $r > 0$ et $a \in K$, $\mathbb{D}_{<}^{\text{an}}(a, r) := \bigcup_{0 \leq s < r} \mathbb{D}^{\text{an}}(a, s)$, le **disque strict analytique** de rayon r de centre a (analogue de $D_{<}(a, r)$).

On considère également $\mathbb{D}_{>}^{\text{an}}(\infty_a, r)$, il est défini de la manière suivante c'est le complémentaire de $\mathbb{D}^{\text{an}}(a, r)$. C'est le cas, où le centre est à l'infini et "dirigé" vers a . Un compact dans un espace séparé est fermé donc $\mathbb{D}^{\text{an}}(a, r)$ est fermé, donc $\mathbb{D}_{>}^{\text{an}}(\infty_a, r)$ ouvert.

Soit f un polynôme de $K[X]$.

Le premier exemple est celui d'un monôme $f = X - b$. Je montre que

$$\mathbb{D}_{<}^{\text{an}}(b, s) = \{|f(x)| < s\}$$

ce qui prouvera bien que les disques stricts sont des ouverts de \mathbb{A}_1^{an} .

En effet, $|X - b|_a(r) < s$ si et seulement si $|X - a + a - b|_a(r) < s$ si et seulement si $\max(|b - a|, r) < s$ si et seulement si $r < s$ et $b \in D_{<}(a, s)$.

Supposons f quelconque. Soit $|\cdot|_a(r)$ tel que $|f|_a(r) < s$. Alors d'après la propriété de continuité 2.5, il existe $r < r' < s$ tel que $|f|_a(r') < s$. La propriété de croissance donne quant à elle que $\forall x \in \mathbb{D}_{>}^{\text{an}}(a, r')$, $|f(x)| \leq |f|_a(r') < s$. Par conséquent, chaque point de $|f|_a(r) < s$ admet un disque strict analytique comme voisinage ouvert.

3.1.3 Faisceau des fonctions analytiques sur \mathbb{A}_1^{an}

Une **fonction analytique** sur un ouvert U de \mathbb{A}_1^{an} est une application f telle que $f(x) \in \mathcal{K}(x)$ et localement une limite de fractions rationnelles, c'est-à-dire pour tout $x \in U$, il existe un voisinage U' de x tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fraction rationnelle g dont le dénominateur est un polynôme non nul sur U' et telle que $|f(x') - g(x')| < \varepsilon$.

On vérifie que cela définit un faisceau d'anneaux locaux sur \mathbb{A}_1^{an} , dont chaque idéal maximal en x est $\{\text{germes } f \mid f(x) = 0\}$.

Je remarque la similarité avec le faisceau structurel d'un spectre (1.6), où l'on demande la même hypothèse de quotient local dont le dénominateur est non nul sur un voisinage. On rajoute seulement l'aspect analytique avec un complété en prenant les limites de ces fractions rationnelles.

CONCLUSION

Grâce à ce stage j'ai entrevu un peu de géométrie algébrique et de la géométrie analytique rigide. Cela m'a permis de faire évoluer mon point de vue sur ce qu'est un espace géométrique, notamment la notion de point qui s'enrichit au fur et à mesure de l'empilement des abstractions que l'on considère.

Je remercie M.Andrea Pulita pour avoir donné de son temps afin de m'expliquer toutes ces notions et me conseiller la littérature appropriée. Ce rapport résume ce que j'en ai compris, et l'interprétation que j'en fais.

Références

- [1] Jean Dieudonné. *The Historical Development of Algebraic Geometry; in The American Mathematical Monthly (79), p.827–866.* Mathematical Association of America, 1972.
- [2] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields.* AMS, 1990.
- [3] André Weil. *Number theory : an approach through history. From Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser Boston, 1st edition, 1987.
- [4] John Harris. *Lexicon Technicum, Curves.* 1710.
- [5] Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1872.
- [6] Jean-Pierre Serre. *Faisceaux Algébriques Cohérents; in Annals of Mathematics (61), p197–278.* Princeton University Press., 1955.
- [7] Henri Cartan. Faisceaux sur un espace topologique. I. *Séminaire Henri Cartan*, 3, 1950-1951.
- [8] Alexandre Grothendieck & Jean Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 166. Springer-Verlag, 1971.
- [9] B. Dragovich & A. Yu. Khrennikov & S. V. Kozyrev & I. V. Volovich. *On p-adic mathematical physics; in p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications (1), p.1–17, volume (1).* Pleiades Publishing Ltd, February 2009.
- [10] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.
- [11] Gilles Christol. *Équations différentielles p-adiques, Applications aux sommes exponentielles.* Hermann, 1994.
- [12] *A Course in p-adic Analysis.* Springer-Verlag, New York, graduate texts in math. 198 edition, 2000.
- [13] Jérôme Poineau. *La droite de Berkovich sur \mathbb{Z} .* Astérisque n° 334, 2010.