
Mécanique analytique et relativité restreinte

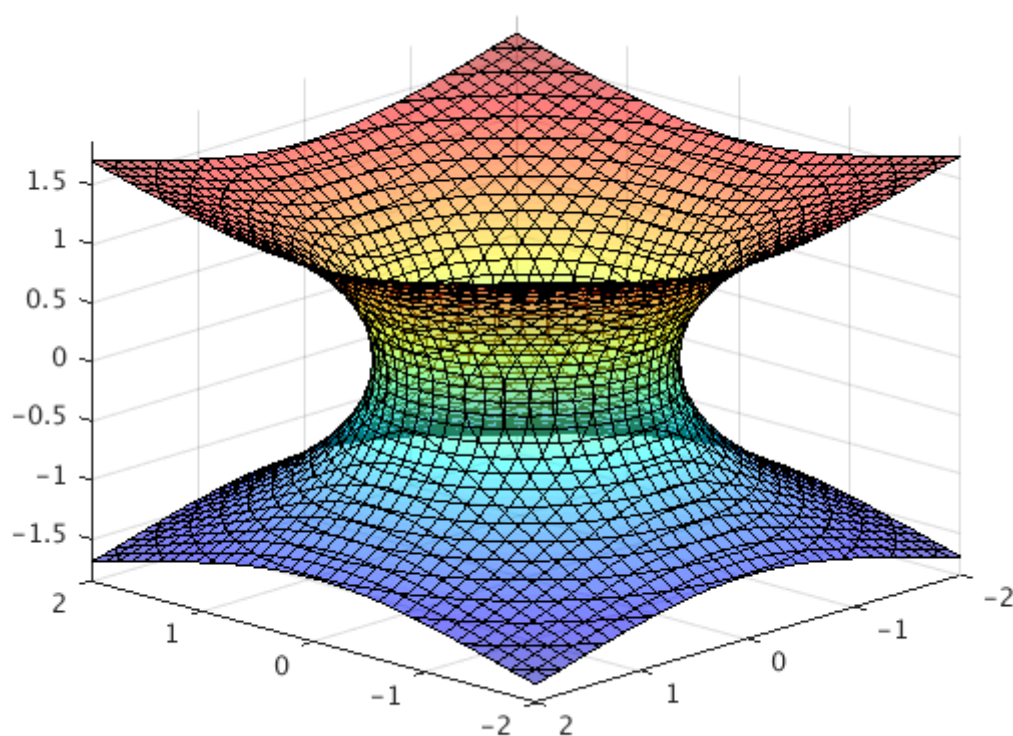


Table des matières

1	Principes variationnels	7
1.1	Fonctionnelles et équations d'Euler-Lagrange	7
1.1.1	Fonctionnelles, actions et lagrangiens	7
1.1.2	Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange	9
1.2	Propriétés des équations d'Euler-Lagrange	15
1.2.1	Lagrangiens différant d'une dérivée totale	15
1.2.2	Covariance des équations d'Euler-Lagrange	18
2	Mécanique lagrangienne	19
2.1	Dynamique d'un point matériel	19
2.1.1	Retour sur la mécanique newtonienne	19
2.1.2	Principe de moindre action	19
2.1.3	Interprétation énergétique	21
2.2	Système à $N \in \mathbb{N}$ particules	22
2.3	Optimisation sous contraintes	24
2.3.1	Formulation et classification des contraintes	24
2.3.2	Multiplicateurs de Lagrange	25
3	Mécanique hamiltonienne	29
3.1	Moments conjugués et hamiltonien	29
3.2	Équations de Hamilton	30
3.3	Crochets de Poisson	33
4	Symétries et théorème de Noether	35
4.1	Symétries d'un système lagrangien	35
4.2	Transformations continues et symétries infinitésimales	36
4.3	Théorème de Noether et quantités conservées	37
5	Relativité restreinte	41
5.1	Relativité restreinte galiléenne	41
5.1.1	Transformation de Galilée	41
5.1.2	Principes de relativité restreinte galiléenne	41
5.1.3	Structure de l'espace-temps galiléen	42
5.2	Relativité restreinte d'Einstein	43
5.2.1	Non-invariance des équations de Maxwell	43

5.2.2	Principes de relativité restreinte d'Einstein	44
5.3	Structure de l'espace-temps en relativité restreinte	45
6	Transformations de Lorentz et formalisme tensoriel	47
6.1	Transformations de Lorentz	47
6.1.1	Transformations de Lorentz	47
6.1.2	Contraction des longueurs et dilatation des durées	48
6.1.3	Invariant relativiste	50
6.1.4	Temps propre et repère propre instantanés	51
6.2	Quadrivecteurs et tenseurs	51
6.2.1	Vecteurs de l'espace-temps	51
6.2.2	Tenseurs	52
6.2.3	Métrique de Minkowski	52
6.2.4	Quadrivecteur vitesse	54
7	Dynamique relativiste	57
7.1	Action de la particule libre relativiste	57
7.2	Quadrivecteur énergie-impulsion	58
7.3	Formulation relativiste de l'équation de la dynamique	59

Ce support de cours est à destination des élèves en préparation à l'agrégation de physique à l'ENS de Lyon. Il était précédemment donné par Sylvain Lacroix, dont le cours de très bonne qualité a été en très grande partie repris pour la partie mécanique analytique.

Le cours est divisé en sept chapitres. Les quatre premiers abordent des notions de mécanique analytique : principes variationnels, mécanique lagrangienne, mécanique hamiltonienne, et l'étude des symétries et du théorème de Noether. Les trois derniers sont une introduction à la théorie de la relativité restreinte d'Einstein.

Par choix et par manque de temps, certaines notions ne seront pas abordées dans ce cours (par exemple les multiplicateurs de Lagrange). Vous pouvez consulter les références suivantes, qui ont servi à la préparation de ce cours :

- **J. José, E. Saletan**, *Classical Dynamics : a Contemporary Approach*, Cambridge University Press, 1998 ;
- **L. Landau, E. Lifchitz**, *Physique théorique – Mécanique*, Ellipses, 1998 ;
- **H. Goldstein**, *Classical Mechanics*, Adisson-Wesley, 1980 ;
- **R. Feynman, R. Leighton, M. Sands**, *Mécanique 1 (ré-édition)*, Dunod, 2018 ;
- **A. Einstein**, *La théorie de la relativité restreinte et générale*, Dunod, 2012 ;
- **J. Hladik**, *Introduction à la relativité restreinte*, Ellipses, 2006 ;
- **W. Appel**, *Mathématiques pour la physique et les physiciens !*, H&K, 2008.

Ce document étant récent, il est susceptible de comporter des erreurs. Si vous repérez une coquille, une imprécision, ou une faute, merci de me le signaler en m'envoyant un mail à samuel.boury@ens-lyon.fr. Je reste à votre disposition si vous avez la moindre question.

Ce premier chapitre aborde le formalisme variationnel de façon très générale. L'objectif est de montrer comment il est possible d'arriver à une formulation rigoureuse de divers problèmes de minimisation ou, plus largement, d'extrémalisation d'une certaine quantité. Cette mise en forme variationnelle d'un problème permet d'écrire de façon systématiques les équations d'Euler-Lagrange associées conduisant à sa résolution.

1.1 Fonctionnelles et équations d'Euler-Lagrange

1.1.1 Fonctionnelles, actions et lagrangiens

De manière générale, on appelle **fonctionnelle** une application $\mathcal{F}$ qui, à tout élément d'un espace de fonctions $\mathcal{E}$, associe un élément de l'espace des nombres réels $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \mathcal{F}[f].\end{aligned}\tag{1.1}$$

Il ne faut pas confondre fonctionnelle et fonction. Une fonction est une application d'un corps vers un autre (exemple des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), qui à tout élément du corps de départ associe un élément dans le corps d'arrivée. Une fonctionnelle est bien une application d'un espace de fonctions vers un corps et, dans notre cas, le corps des réels $\mathbb{R}$. En particulier, les propriétés d'analyse sur les fonctions ne s'appliquent pas aux fonctionnelles.

EXEMPLE 1. Exemples de fonctionnelles.

- (a) Fonctionnelle d'évaluation : pour $\mathcal{E} = \{\text{fonctions de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, on considère :

$$\begin{aligned}\text{Ev}_{x_0} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x_0).\end{aligned}\tag{1.2}$$

- (b) Norme supérieure : pour $\mathcal{E} = \{\text{fonctions bornées de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$, on considère :

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.\end{aligned}\tag{1.3}$$

(c) Une combinaison des deux précédentes : pour $\mathcal{E} = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$, on considère :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \sup_{x \in [0; 1]} |f'(x)| + f(0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dans toute la suite de ce cours, on ne considèrera que des fonctionnelles particulières pouvant s'écrire sous la forme d'une intégrale (ce que l'on justifiera au chapitre suivant). Cette condition revient à choisir l'espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{E} = \left\{ \text{fonctions } \mathcal{C}^2 \text{ de } [a; b] \text{ dans } \mathbb{R}^n \right\}, \quad (1.5)$$

où a et b sont deux réels fixés et n un entier.

Une fonction q de $\mathcal{E}$ dépend d'un **paramètre**, souvent noté t , pris dans l'intervalle $[a; b]$, et est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, que l'on appelle **espace des configurations**. Chaque fonction q de $\mathcal{E}$ peut être vue comme un vecteur de n fonctions $q_i : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, que l'on nomme **coordonnées généralisées**. Les dérivées de q_i par rapport au paramètre t seront notées $\dot{q}_i$ et appelées **vitesse généralisées**.

On introduit le **lagrangien**, ou **fonction lagrangienne**, que l'on note $\mathcal{L}$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\longmapsto \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

ainsi qu'une fonctionnelle que l'on nomme **action** et que l'on note $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \int_a^b \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

REMARQUE 1. Distinction fonction & variable.

Dans l'équation (1.6), les notations q , $\dot{q}$ et t désignent des variables muettes, prises respectivement dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ et $[a; b]$. Le lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonction de ces trois variables qui à tout triplet de variables $(q, \dot{q}, t)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b]$ associe une image dans $\mathbb{R}$. En revanche, dans l'équation (1.7), q est une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{E}$ défini précédemment et $\dot{q}$ sa dérivée. L'action $\mathcal{S}$ est alors une fonctionnelle qui à toute fonction q de $\mathcal{E}$ associe une valeur dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 2. Trajectoire dans $\mathbb{R}^n$.

Les fonctions de $\mathcal{E}$ décrivent des trajectoires de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^n$, parcourues entre un instant initial $t = a$ et un instant final $t = b$. On peut considérer la fonctionnelle qui à une fonction q de $\mathcal{E}$ associe la longueur de la trajectoire parcourue :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \mathcal{S}[q] = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\dot{q}_i(t))^2 \right)^{1/2} dt. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Cette fonctionnelle dérive d'un lagrangien dépendant uniquement de la variable $\dot{q}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, \dot{q}, t) &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.1.2 Principe variationnel et équations d'Euler-Lagrange

On considère une fonctionnelle $\mathcal{S}$ dérivant d'un lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{S}[q] = \int_a^b \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (1.10)$$

On cherche à déterminer les extrema locaux de $\mathcal{S}$. On fixe deux points q_a et q_b dans l'espace des configurations $\mathbb{R}^n$. Ces deux points sont associés aux valeurs des fonctions q considérées pour $t = a$ et $t = b$ (du point de vue mécanique, il s'agirait de positions initiale et finale). On cherche une fonction $q^{(e)} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $q^{(e)}(a) = q_a$ et $q^{(e)}(b) = q_b$ qui soit un extremum local de $\mathcal{S}$ et donc un point stationnaire de $\mathcal{S}$. Dans l'exemple précédent, cela revient à chercher les fonctions q minimisant la fonctionnelle donnant la longueur du chemin parcouru pour trouver le trajet le plus court.

L'hypothèse d'extrémalité locale de l'action, et donc de stationnarité, est équivalente à l'annulation de la variation de $\mathcal{S}$ prise au premier ordre en δq :

$$\delta \mathcal{S} = \mathcal{S}[q] - \mathcal{S}[q^{(e)}], \quad (1.11)$$

ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de chemin extrémal autre que $q^{(e)}$ dans son voisinage.

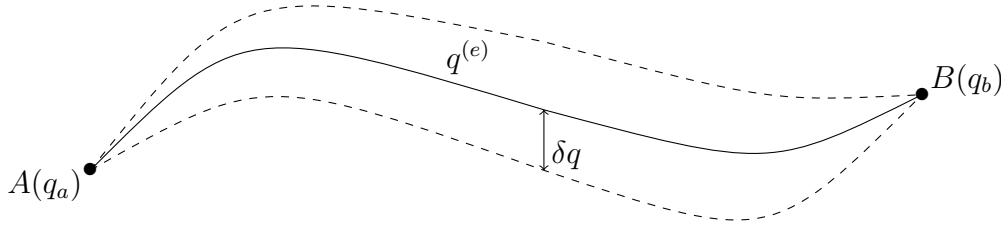


FIGURE 1.1 – Le chemin $q^{(e)}$ est extrémal.

L'expression de la variation $\delta \mathcal{S}$ de l'action peut se calculer explicitement à partir d'un développement limité à l'ordre un du lagrangien :

$$\delta \mathcal{S} = \mathcal{S}[q^{(e)} + \delta q] - \mathcal{S}[q^{(e)}] \quad (1.12)$$

$$= \int_a^b \mathcal{L}(q^{(e)}(t) + \delta q(t), \dot{q}^{(e)}(t) + \delta \dot{q}(t), t) dt - \int_a^b \mathcal{L}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) dt \quad (1.13)$$

$$= \int_a^b \left(\mathcal{L}(q^{(e)}(t) + \delta q(t), \dot{q}^{(e)}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - \mathcal{L}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) dt \quad (1.14)$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \delta \dot{q}_i(t) \right) dt \quad (1.15)$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) \delta q_i(t) dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \delta q_i(t) \right]_{t=a}^{t=b}, \quad (1.16)$$

où la dernière étape est obtenue en utilisant que $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$ et en procédant à une intégration par parties. Comme $\delta q(t = a) = \delta q(t = b) = 0$ par définition, le terme à évaluer est nul et on obtient :

$$\delta \mathcal{S} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) \delta q_i(t) dt = 0. \quad (1.17)$$

Cette égalité est vraie pour toute variation infinitésimale δq (avec valeurs nulles en $t = a$ et $t = b$) si et seulement si :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} (q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t) = 0, \quad (1.18)$$

pour tout i et pour tout t (par le lemme de Du Bois-Raymond ou lemme fondamental du calcul des variations). L'équation (1.18) est appelée **équation d'Euler-Lagrange**. On la note souvent de manière plus compacte :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.19)$$

EXEMPLE 3. Plus court chemin dans $\mathbb{R}^2$.

Dans $\mathbb{R}^2$, décrit par les coordonnées cartésiennes (x, y) , l'élément de longueur infinitésimale s'écrit : $dl^2 = dx^2 + dy^2$. La distance parcourue sur un chemin entre deux points A et B est alors :

$$\mathcal{D}[y] = \int_A^B dl = \int_A^B \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} dx, \quad (1.20)$$

en paramétrisant selon la coordonnée x . Dans ce cas, cette intégrale constitue une action pour laquelle on a défini un lagrangien $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (1.21)$$

On peut faire l'analogie entre les notations utilisées dans la discussion générale et cet exemple afin d'identifier toutes les variables :

	Discussion générale	Exemple chemin dans $\mathbb{R}^2$
Paramètre	t	x
Espace de configuration	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$
Coordonnées généralisées	q	y
Vitesses généralisées	$\dot{q} = \frac{dq}{dt}$	$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$
Action	$\mathcal{S}$	$\mathcal{D}$
Lagrangien	$\mathcal{L}$	$\mathcal{V}$

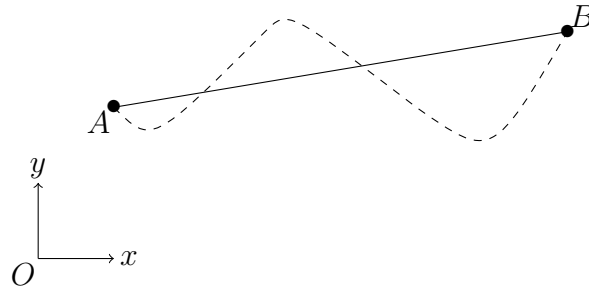
Trouver le chemin le plus court dans $\mathbb{R}^2$ revient à trouver la valeur minimale de l'action $\mathcal{D}$ associée. On peut donc utiliser les équations d'Euler-Lagrange sur le lagrangien $\mathcal{V}$ et on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0. \quad (1.22)$$

D'où, simplement :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0. \quad (1.23)$$

En terminant la résolution, on trouve que $y(x) = \alpha x + \beta$, avec α et β deux constantes dépendant des coordonnées des points A et B . Le chemin le plus court dans $\mathbb{R}^2$ est donc une droite (voir figure 1.2).

FIGURE 1.2 – La ligne droite est le plus court chemin dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Comme le montre cet exemple, la méthode générale pour résoudre un problème variationnel est systématique et peut être résumée ainsi :

1. Mettre le problème sous forme fonctionnelle (dans l'exemple, il s'agissait d'écrire la longueur du chemin sous la forme d'une intégrale) ;
2. Identifier le paramètre (ici x) et coordonnées généralisées (ici y) ;
3. Déterminer l'expression du lagrangien en fonction du paramètre et des coordonnées et vitesses généralisées (en l'occurrence, x , y et $\dot{y}$) ;
4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange ;
5. Résoudre ces équations.

EXERCICE 1. ★ Plus court chemin dans $\mathbb{R}^n$.

Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé les équations d'Euler-Lagrange pour montrer que le plus court chemin entre deux points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est la ligne droite. Le fait de se placer en dimension 2 avait permis de simplifier le problème en paramétrant une des coordonnées par l'autre. L'objectif de cet exercice est de généraliser le résultat à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le problème du plus court chemin dans $\mathbb{R}^n$ se réduit à la minimisation de la fonctionnelle :

$$\mathcal{D}[q] = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\dot{q}_i(t))^2 \right)^{1/2} dt. \quad (1.24)$$

2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées et en déduire que :

$$\dot{q}_i = c_i \sqrt{\sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2}, \quad (1.25)$$

où c_i est une constante indépendante de t .

3. En déduire que la courbe $t \mapsto q(t)$ donnant le plus court chemin dans $\mathbb{R}^n$ est une droite de vecteur directeur $(c_1, \dots, c_n)$.

EXERCICE 2. ★ Bulle de savon entre deux anneaux coaxiaux (sujet C 2016, question 12).

On considère deux anneaux coaxiaux de rayon R , situés dans les plans $z = h$ et $z = -h$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, paramétrisé par les coordonnées (x, y, z) . On les plonge dans l'eau savonneuse et on les en retire. Une bulle de savon se crée entre les deux anneaux : le but de cet exercice est d'en déterminer la forme. Le système est représenté figure 1.3.

Le problème étant invariant par rotation autour de l'axe vertical, la position de la bulle à une hauteur z ne dépend que de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ à l'axe. On cherche à déterminer l'équation de la courbe $r(z)$ donnant le rayon de la bulle à la hauteur z .

1. Justifier que la position d'équilibre de la bulle de savon est celle minimisant sa surface $\mathcal{A}$.

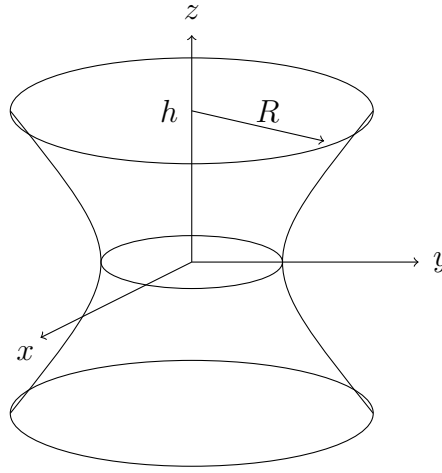


FIGURE 1.3 – Deux anneaux rigides coaxiaux, en $z = h$ et $z = -h$, reliés par un film de savon.

2. Démontrer que l'aire de la bulle s'exprime comme :

$$\mathcal{A} = \int_{-h}^h 2\pi r(z) \sqrt{1 + \dot{r}^2(z)} dz, \quad (1.26)$$

avec $\dot{r} = \frac{dr}{dz}$.

3. Exprimer alors le problème comme une minimisation fonctionnelle et identifier les paramètres, coordonnées et vitesses généralisées, action et lagrangien du système.
4. Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange associée s'écrit :

$$1 + \dot{r}^2 = r\ddot{r}. \quad (1.27)$$

5. Vérifier alors que l'équation de la bulle est donnée par une caténoïde :

$$r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right), \quad (1.28)$$

où a est une constante telle que $R = a \cosh\left(\frac{h}{a}\right)$.

EXERCICE 3. ★★ Courbe brachistochrone.

On considère une courbe plane $\mathcal{C}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, reliant l'origine $O(0,0)$ à un point $A(x_0, y_0)$ fixé. On paramétriserait cette courbe en exprimant l'ordonnée y comme une fonction de l'abscisse x . On s'intéresse à un point matériel M , repéré par ses coordonnées (x, y) , posé sans vitesse initiale au point O à l'instant $t = 0$. Ce point matériel est soumis à l'action de la gravité et glisse sans frottement sur la courbe $\mathcal{C}$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la forme de $\mathcal{C}$ optimisant le temps de chute du point matériel depuis l'origine O jusqu'au point A . Le problème est représenté figure 1.4.

1. Soit s l'abscisse curviligne le long de la courbe $\mathcal{C}$, définie par $ds^2 = dx^2 + dy^2$. En utilisant un argument énergétique, justifier que la vitesse du point $v = \frac{ds}{dt}$ à l'ordonnée y est égale à $\sqrt{2gy}$.
2. En déduire que le temps mis par le point matériel pour parcourir la courbe $\mathcal{C}$ est donné par :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx, \quad (1.29)$$

où l'on a défini $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$.

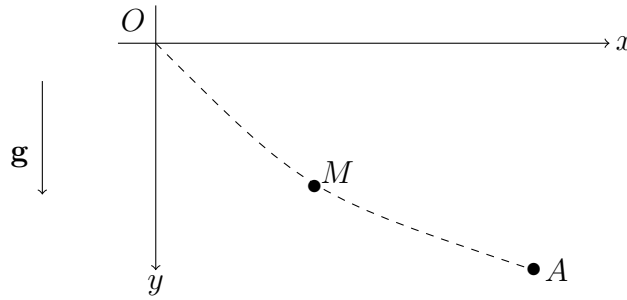


FIGURE 1.4 – Problème du brachistochrone.

3. Faire l'analogie entre ce problème et un problème variationnel en identifiant le paramètre, les coordonnées et vitesses généralisées, l'action et le lagrangien du système.
4. En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, montrer que la fonction y vérifie :

$$1 + \dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0. \quad (1.30)$$

5. Vérifier que la quantité :

$$Q = y(1 + \dot{y}^2), \quad (1.31)$$

est une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire que $\dot{Q} = 0$.

6. On reparamétrise y par : $y = \frac{Q}{2} (1 - \cos \theta)$. Démontrer que :

$$x(\theta) = \frac{Q}{2} (1 - \sin \theta). \quad (1.32)$$

L'équation de la courbe (x, y) en fonction de θ ainsi obtenue est celle d'une cycloïde.

EXERCICE 4. ★★★★★ Chemin le plus court dans un espace courbé.

Nous avons vu précédemment comment utiliser un problème variationnel afin de prouver que la ligne droite est le plus court chemin dans un espace euclidien. Pour y parvenir, nous avons écrit la distance entre deux points sous la forme d'une intégrale de l'élément de distance euclidien infinitésimal : $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^n dq_i^2}$.

Ce calcul correspond au cas du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Une première généralisation possible est de considérer un produit scalaire quelconque, $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i v_j$, avec g symétrique en les indices i et j . L'élément de distance infinitésimal sera alors : $ds = \sqrt{\langle q, q \rangle}$.

Une généralisation plus complexe est de considérer un espace **courbé**. Ce principe, à la base de la géométrie Riemannienne, consiste à considérer un espace, paramétrisé par des coordonnées x^μ , muni d'une notion de distance infinitésimale dépendant localement du point considéré :

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}, \quad (1.33)$$

où l'on sous-entend une sommation sur les indices répétés μ et ν . Le champ $g_{\mu\nu}(x)$, symétrique par échange de μ et ν , qui décrit le produit scalaire au point x , est appelé la **métrique** de l'espace.

Les courbes de longueur minimale d'un espace courbé sont appelées des **géodésiques**. Déterminer ces courbes est donc équivalent à minimiser la fonctionnelle :

$$\mathcal{D}[x] = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu(t) \dot{x}^\nu(t)} dt. \quad (1.34)$$

Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées, puis effectuer le changement de paramètre $t \mapsto s$, l'abscisse curviligne s est définie par l'équation (1.33). Montrer alors que les équations

d'Euler-Lagrange peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0, \quad (1.35)$$

avec les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right), \quad (1.36)$$

où $g^{\mu\nu}$ désigne l'inverse de $g_{\mu\nu}$, c'est-à-dire : $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$.

Cette équation, appelée **équation aux géodésiques**, est l'équation fondamentale de la dynamique en théorie de la relativité générale, et découle ainsi d'un principe variationnel.

EXERCICE 5. ★ Principe de Fermat et équation eikonale.

On considère un rayon lumineux se propageant dans un milieu optique d'indice $n(\mathbf{r})$, dépendant du point de l'espace $\mathbf{r}$ considéré. On décrit le rayon lumineux comme une courbe $\mathbf{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de l'espace, paramétrisée par un paramètre t (qui n'est pas nécessairement le temps). Le chemin optique est alors défini comme la distance parcourue par le rayon lumineux pondérée par l'indice optique :

$$\mathcal{C}[\mathbf{r}] = \int_a^b n(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_a^b n(\mathbf{r}(t)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t)} dt, \quad (1.37)$$

où $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Le **principe de Fermat** stipule que, dans l'approximation de l'optique géométrique, la trajectoire $\mathbf{r}$ suivie par le rayon lumineux est telle que le chemin optique $\mathcal{C}[\mathbf{r}]$ soit extrémale et, le plus souvent, minimale.

1. Interpréter le principe de Fermat comme un problème variationnel. Identifier le paramètre, les coordonnées et vitesses généralisées, l'espace de configuration, l'action et le lagrangien du système.
2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Effectuer le changement de paramètre $t \mapsto s$ de t vers l'abscisse curviligne s définie par :

$$ds = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt. \quad (1.38)$$

Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange se réécrivent comme l'**équation eikonale** :

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.39)$$

(En optique ondulatoire, cette équation est parfois aussi appelée **équation des rayons lumineux**, le nom d'équation eikonale désignant alors une reformulation de la relation de dispersion pour l'onde électromagnétique, équivalente à l'équation des rayons lumineux.)

Cette équation relie la courbure des rayons lumineux dans un milieu optique non-homogène au gradient d'indice optique. Elle permet, par exemple, d'expliquer les phénomènes de mirage ou de propagation dans des fibres optiques à gradient d'indice.

EXERCICE 6. ★★ Lagrangien dépendant de dérivées d'ordre supérieur.

Soit $d \in \mathbb{N}$. On considère la fonctionnelle :

$$\mathcal{S}[q] = \int_a^b \mathcal{L} \left(q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(d)}(t), t \right) dt, \quad (1.40)$$

où $q^{(k)} = \frac{d^k q}{dt^k}$.

On cherche à trouver l'équation que vérifie un extremum local $\tilde{q}$ de $\mathcal{S}$. Pour cela, on s'inspirera de la démonstration des équations d'Euler-Lagrange et on cherchera $\tilde{q}$ comme un point stationnaire de $\mathcal{S}$. On pose donc $q = \tilde{q} + \delta q$, avec $\delta q^{(k)}(t = a) = \delta q^{(k)}(t = b) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, d-1$.

Calculer $\delta\mathcal{S} = \mathcal{S}[q] - \mathcal{S}[\tilde{q}]$ à l'ordre 1 en δq et en déduire la condition d'extrémalité $\delta\mathcal{S} = 0$ sous la forme d'équations différentielles d'ordre $2d$ sur $\tilde{q}_i$, généralisant les équations d'Euler-Lagrange.

1.2 Propriétés des équations d'Euler-Lagrange

On aborde deux aspects importants des équations d'Euler-Lagrange : une invariance de jauge et leur covariance. Dans toute cette section, on considère un problème variationnel pour lequel on identifie un paramètre t , des coordonnées généralisées q , un lagrangien $\mathcal{L}$ et une action $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}[q] = \int_a^b \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (1.41)$$

1.2.1 Lagrangiens différant d'une dérivée totale

On appelle **grandeur** une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b]$ vers $\mathbb{R}$, dépendant des variables $(q, \dot{q}, t)$. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées, vues comme les fonctions :

$$(q, \dot{q}, t) \longmapsto q \quad \text{et} \quad (q, \dot{q}, t) \longmapsto \dot{q}, \quad (1.42)$$

sont des grandeurs. De même, le lagrangien du système est une grandeur.

On considère à présent une fonction $q^{(e)}$ solution des équations d'Euler-Lagrange. La notation en exposant distingue, là encore, une solution particulière (la solution extrémale) pour ne pas la confondre avec les coordonnées généralisées qui sont des variables muettes. L'**évaluation** d'une grandeur $\mathcal{G}$ est l'évaluation de $\mathcal{G}$ vue comme une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b]$ au point $(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t)$. On notera $\mathcal{G}^{(e)}$ cette évaluation. La fonction $q^{(e)}$ étant fixée, $\mathcal{G}^{(e)}$ est une fonction du paramètre $t \in [a; b]$. On peut donc considérer sa dérivée par rapport à t qui s'obtient avec les propriétés d'analyse classique et de composition des dérivées :

$$\frac{d\mathcal{G}^{(e)}}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(\mathcal{G} \left(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t \right) \right) \quad (1.43)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \left(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t \right) \dot{q}_i^{(e)}(t) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i} \left(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t \right) \ddot{q}_i^{(e)}(t) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \left(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t \right), \quad (1.44)$$

où l'on a utilisé une sommation d'Einstein sur l'indice répété i .

On remarque que les dérivées partielles de $\mathcal{G}$ par rapport à q , $\dot{q}$ et t sont également des fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b]$ vers $\mathbb{R}$ et donc des grandeurs, qu'il est possible d'évaluer au point $(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t)$. On peut donc réécrire la dérivée de $\mathcal{G}^{(e)}$ en utilisant les conventions précédentes :

$$\frac{d\mathcal{G}^{(e)}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right)^{(e)} \dot{q}_i^{(e)} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i} \right)^{(e)} \ddot{q}_i^{(e)} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \right)^{(e)}. \quad (1.45)$$

Afin de distinguer cette dérivée opérée après évaluation au point $(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t)$ de la dérivée partielle par rapport à t évaluée au même point, on l'appellera **dérivée totale** de la grandeur $\mathcal{G}$.

Remarquons qu'en utilisant ces concepts de grandeurs et d'évaluation, il est possible de donner une formulation compacte et rigoureuse des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)^{(e)} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right)^{(e)} = 0. \quad (1.46)$$

En règle générale, la notion de dérivée totale définie ci-dessus n'a de sens qu'une fois la grandeur $\mathcal{G}$ évaluée en un point particulier, c'est-à-dire pour $\mathcal{G}^{(e)}$. Il existe cependant des cas pour lesquels on peut définir la dérivée totale d'une grandeur avant son évaluation en un point. Par exemple, si on considère une grandeur $\mathcal{G}$ dépendant uniquement des coordonnées généralisées q et du paramètre t ($\mathcal{G}$ ne dépend donc pas des vitesses généralisées $\dot{q}$), alors on peut définir la grandeur :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} : (q, \dot{q}, t) \mapsto \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}. \quad (1.47)$$

Il s'agit bien d'une grandeur, *i.e.* d'une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a; b]$ vers $\mathbb{R}$. Son évaluation au point $(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), t)$ redonne la dérivée totale de $\mathcal{G}^{(e)}$:

$$\frac{d\mathcal{G}^{(e)}}{dt} = \left(\frac{d\mathcal{G}}{dt} \right)^{(e)}. \quad (1.48)$$

La grandeur ainsi définie sera appelée **dérivée totale formelle** de $\mathcal{G}$.

On considère maintenant un second lagrangien $\mathcal{L}'$, qui diffère du premier lagrangien $\mathcal{L}$ par une dérivée totale formelle, c'est-à-dire qu'il existe une grandeur $\mathcal{G}$, fonction de q et de t seulement, telle que :

$$\mathcal{L}'(q(t), \dot{q}(t), t) = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}(q(t), \dot{q}(t), t). \quad (1.49)$$

L'action $\mathcal{S}'$ associée au lagrangien $\mathcal{L}'$ est alors, par définition :

$$\mathcal{S}'[q] = \int_a^b \mathcal{L}'(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (1.50)$$

qui se réécrit, en utilisant la définition de $\mathcal{L}'$ et en réalisant une première intégration sur la dérivée totale formelle :

$$\mathcal{S}'[q] = \mathcal{S}[q] + \mathcal{G}(q_b, b) - \mathcal{G}(q_a, a). \quad (1.51)$$

Le terme dépendant de $\mathcal{G}$ est une constante qui ne dépend que des points initial et final. L'extrémalisation de la fonctionnelle $\mathcal{S}'$ est donc équivalente à celle de la fonctionnelle $\mathcal{S}$, et les équations d'Euler-Lagrange doivent donc être équivalentes :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = 0. \quad (1.52)$$

Ce résultat est obtenu en utilisant directement le principe variationnel, la conclusion étant alors évidente. La démonstration peut également se faire de façon plus directe en comparant la forme des équations d'Euler-Lagrange obtenues pour les deux lagrangiens.

EXERCICE 7. ★ Lagrangiens différant d'une dérivée totale : approche directe.

On considère deux lagrangiens :

$$\mathcal{L} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{G}}{dt}, \quad (1.53)$$

où $\mathcal{G}$ est une grandeur. Montrer explicitement que les équations d'Euler-Lagrange pour $\mathcal{L}'$ sont les mêmes que celles pour $\mathcal{L}$.

Indication : introduire l'expression explicite de la dérivée totale formelle de $\mathcal{G}$ et utiliser son équation d'évolution pour calculer les dérivées totales apparaissant dans les équations d'Euler-Lagrange.

EXERCICE 8. ★★★ Lagrangiens différant d'une dérivée totale : réciproque.

Jusqu'à présent, on a distingué les quantités, fonctions de $(q, \dot{q}, t)$, de leur évaluation le long d'une solution $q^{(e)}$ des équations d'Euler-Lagrange. Ceci nous a permis de définir formellement la dérivée totale d'une grandeur $\mathcal{G}$ comme étant :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, t) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(q, t). \quad (1.54)$$

De même, si on considère une quantité $\mathcal{G}$ dépendant non plus uniquement des coordonnées généralisées q et du paramètre t , mais également des vitesses généralisées $\dot{q}$, on peut définir formellement sa dérivée totale comme étant la fonction de $(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ suivante :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t) \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(q, \dot{q}, t). \quad (1.55)$$

1. On considère un lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En utilisant la définition formelle de dérivée totale donnée ci-dessus, donner l'expression des fonctions $\mathcal{D}_i$:

$$\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (1.56)$$

en termes de dérivées de $\mathcal{L}$. Remarquons notamment que les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\mathcal{D}_i^{(e)}(t) = \mathcal{D}_i(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), \ddot{q}^{(e)}(t), t) = 0. \quad (1.57)$$

On considère maintenant un second lagrangien $\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$ et les fonctions $\mathcal{D}'_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ associées. On dit alors que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ donnent exactement les mêmes équations d'Euler-Lagrange si les fonctions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont égales. Dans la suite de l'exercice on supposera que cette égalité est vérifiée et on cherchera à démontrer que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ne diffèrent que de la dérivée totale d'une certaine quantité $\mathcal{G}(q, t)$. On pose pour cela :

$$Psi(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t). \quad (1.58)$$

2. Utiliser que $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}'_i$ et la question précédente pour établir l'égalité fonctionnelle :

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} = 0. \quad (1.59)$$

3. En étudiant la dépendance en $\ddot{q}$ de l'équation ci-dessus, montrer que Ψ est de la forme :

$$\Psi(q, \dot{q}, t) = \chi_i(q, t) \dot{q}_i + \phi(q, t), \quad (1.60)$$

avec χ_i et ϕ des fonctions de (q, t) telles que :

$$\dot{q}_j \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \chi_j}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial q_i} = 0. \quad (1.61)$$

4. De même, en étudiant la dépendance en $\dot{q}$ de l'équation ci-dessus, montrer qu'il existe une quantité $\mathcal{G}(q, t)$ telle que :

$$\chi_i(q, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, t), \quad (1.62)$$

et une fonction $\lambda(t)$ telle que :

$$\phi(q, t) = \frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, t) + \lambda(t). \quad (1.63)$$

Indication : par le lemme de Poincaré, si un champ de vecteur $V_i(x)$ est tel que $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$ pour tout i, j , alors V_i est un gradient.

5. En déduire que Ψ est une dérivée totale.

1.2.2 Covariance des équations d'Euler-Lagrange

On considère un changement de coordonnées généralisées, pouvant dépendre du temps :

$$q \longmapsto q' = f(q, t). \quad (1.64)$$

On suppose cette transformation inversible, *i.e.* il existe une fonction g réciproque de f telle que $q = g(q', t)$. Les vitesses généralisées se transforment alors comme :

$$\dot{q} \longmapsto \dot{q}' = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.65)$$

qui s'inverse en :

$$\dot{q} = \frac{\partial g}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (1.66)$$

Cette transformation des coordonnées s'applique aussi aux grandeurs considérées. Ainsi, à toute grandeur $\mathcal{G}$ fonction de $(q, \dot{q}, t)$, on associe une grandeur transformée :

$$\mathcal{G}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{G}\left(g(q', t), \frac{\partial g}{\partial q'_i}(q', t) \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}(q', t), t\right), \quad (1.67)$$

fonction des nouvelles coordonnées $(q', \dot{q}', t)$. En appliquant ces transformations, la fonctionnelle d'action devient :

$$\mathcal{S}'[q'] = \int_a^b \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) dt = \int_a^b \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = \mathcal{S}[q]. \quad (1.68)$$

L'extrémalisation de $\mathcal{S}'$ par rapport à q' est alors strictement équivalente à l'extrémalisation de $\mathcal{S}$ par rapport à q . On a donc **covariance des équations d'Euler-Lagrange** :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_i} = 0 \quad (1.69)$$

REMARQUE 2. Transformation du lagrangien.

On a montré, dans la partie précédente, que deux lagrangiens différant uniquement d'une dérivée totale formelle ont, dans le même système de coordonnées, les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

Ici, on montre que les équations d'Euler-Lagrange sont covariantes, c'est-à-dire qu'elles sont équivalentes après changement de coordonnées. Les lagrangiens $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont a priori différents du fait de la transformation de coordonnées et il ne s'agit donc pas d'appliquer les équations d'Euler-Lagrange au lagrangien $\mathcal{L}$ dans les coordonnées primées !

EXERCICE 9. ★★ Covariance des équations d'Euler-Lagrange : approche directe.

En utilisant les règles de dérivation des compositions, montrer par un calcul direct la covariance des équations d'Euler-Lagrange.

Indication : l'inversibilité de la transformation $q \longmapsto q'$ se traduit localement par l'inversibilité de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_{i,j}$.

L'objectif de ce chapitre est de faire le lien entre les principes variationnels abordés précédemment et le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), c'est-à-dire entre les équations de Newton et celles d'Euler-Lagrange pour un lagrangien judicieusement choisi. L'idée est de trouver une formulation variationnelle des problèmes de mécanique.

2.1 Dynamique d'un point matériel

2.1.1 Retour sur la mécanique newtonienne

On considère un point matériel de masse m dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Ce point est repéré par des coordonnées cartésiennes $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

On suppose que ce point est soumis à une force $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ dérivant d'un potentiel $V(\mathbf{x}, t)$ de sorte que : $\mathbf{F} = -\nabla V$. La dynamique du point matériel est alors donnée d'après le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) par :

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(\mathbf{x}(t), t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t), t), \quad (2.1)$$

pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

2.1.2 Principe de moindre action

On considère les x_i comme des coordonnées généralisées, vivant dans l'espace des configurations $\mathbb{R}^3$. Les vitesses généralisées sont alors données par $\dot{x}_i$, elles-mêmes dans $\mathbb{R}^3$. Le paramètre alors utilisé est le temps t . Dans ce cas, on considère le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

Il est facile de vérifier que le lagrangien ainsi défini vérifie :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i. \quad (2.3)$$

L'application des équations d'Euler-Lagrange au lagrangien proposé permet donc de retrouver le système d'équations issu du PFD. Les deux formulations sont donc équivalentes :

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(\mathbf{x}(t), t) \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0. \quad (2.4)$$

Le PFD en mécanique newtonienne pour un point matériel soumis à un potentiel est donc équivalent à l'extrémalisation de la fonctionnelle d'action :

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2(t) - V(\mathbf{x}(t), t) \right) dt. \quad (2.5)$$

C'est ce qu'on appelle le **principe de moindre action**, ou **principe de Hamilton**.

EXEMPLE 4. Oscillateur harmonique à 1D.

On considère une particule massique de masse m repérée par sa position x . Cette particule est accrochée à l'origine du repère par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0 . L'application du principe fondamental de la dynamique donne l'équation d'évolution temporelle :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0). \quad (2.6)$$

En considérant le potentiel $V(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2$, on écrit le lagrangien comme :

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{2} (x - x_0)^2. \quad (2.7)$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée redonne bien l'évolution donnée par le PFD.

EXERCICE 10. ★ Équations d'Euler-Lagrange en coordonnées cylindriques.

On considère le lagrangien d'un point matériel soumis à un potentiel $V : \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t)$. Le but de cet exercice est d'effectuer, au niveau du lagrangien, un changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

1. Exprimer le changement de coordonnées $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ et son inverse.
2. Exprimer les vitesses généralisées $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en fonction de $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$.
3. En déduire l'expression du lagrangien exprimé dans les coordonnées cylindriques.
4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées et comparer au PFD écrit en coordonnées cylindriques.

EXERCICE 11. ★★ Équations d'Euler-Lagrange en coordonnées sphériques.

On considère le même problème que dans l'exercice précédent, mais on s'intéresse cette fois à un changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Reproduire la méthode de l'exercice précédent pour écrire les équations d'Euler-Lagrange en coordonnées sphériques, et les comparer avec le PFD.

EXERCICE 12. ★★ Particule chargée dans un champ électromagnétique.

On considère une particule de masse m et de charge q , repérée par sa position $\mathbf{x}$, plongée dans un champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. On choisit un potentiel électrique ϕ et un potentiel magnétique $\mathbf{A}$ tels que :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.8)$$

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz.
2. Écrire le PFD pour la particule.

3. Vérifier que les équations du mouvement obtenues par le PFD sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi(\mathbf{x}, t) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

Indication : la dérivée totale de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (2.10)$$

et on pourra utiliser l'identité d'analyse vectorielle :

$$\nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (2.11)$$

valide pour tout vecteur $\mathbf{V}$ indépendant de $\mathbf{x}$.

4. Rappeler la notion de transformation de jauge des potentiels $(\phi, \mathbf{A})$. En considérant le lagrangien $\mathcal{L}'$ correspondant à un autre choix de jauge $(\phi', \mathbf{A}')$, calculer $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$. Commenter.

2.1.3 Interprétation énergétique

Dimensionnellement, le lagrangien proposé ci-dessus est homogène à une énergie.

Dans le cas où le système est conservatif, et que les forces dérivent d'un potentiel V indépendant de la vitesse, on peut écrire le lagrangien comme :

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (2.12)$$

c'est-à-dire comme la différence de l'énergie cinétique T et du potentiel V .

REMARQUE 3. Quelle énergie ?

Si le lagrangien est bien homogène à une énergie, il n'est pas évident de lui trouver une interprétation physique étant donné qu'il s'agit de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle et non de leur somme (qui donnerait l'énergie mécanique). Le lien énergétique sera plus direct avec la formulation hamiltonienne.

REMARQUE 4. Potentiel indépendant des vitesses généralisées.

La démonstration de l'équivalence entre les équations d'Euler-Lagrange et du PFD est fautive dans le cas où le potentiel dépend des vitesses généralisées. En pratique, les potentiels considérés pour des forces conservatives ne dépendent que des coordonnées généralisées et éventuellement du paramètre t . Il existe cependant des formulations lagrangiennes de problèmes non conservatifs pour lesquels le lagrangien ne s'écrit pas directement $T - V$.

EXERCICE 13. ★ Oscillateur harmonique amorti.

On considère un point matériel de masse m , repéré par sa position $\mathbf{x}$. Ce point est soumis à une force de rappel de la forme $-k\mathbf{x}$, ainsi qu'à une force de friction de la forme $-\lambda\dot{\mathbf{x}}$.

1. Écrire le PFD pour ce point matériel.
2. Vérifier que les équations du mouvement obtenues avec le PFD sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange issues du lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \exp\left(\frac{\lambda t}{m}\right) \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2} k \mathbf{x}^2\right). \quad (2.13)$$

3. Effectuer le changement de variable $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r} = \exp\left(\frac{\lambda t}{m}\right) \mathbf{x}$ au niveau du lagrangien. Commenter.

EXERCICE 14. ★ Frottement en régime turbulent.

On considère le lagrangien suivant, dépendant d'une unique coordonnée généralisée x et de sa dérivée temporelle $\dot{x}$:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \exp\left(\frac{2\lambda x}{m}\right) \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - W(x)\right), \quad (2.14)$$

où W est une fonction de x , non déterminée pour le moment.

Écrire l'équation d'Euler-Lagrange associée. Interpréter cette équation comme l'équation de la dynamique d'un point matériel soumis à une force extérieure et à une force de frottement à haute vitesse (*i.e.* proportionnelle à la vitesse au carré). Quelle est la relation entre la fonction W et la force extérieure? Comparer à la notion de potentiel. Discuter le signe que λ doit avoir pour que l'équation soit physiquement vraisemblable, selon les différentes cinématiques du problème.

2.2 Système à $N \in \mathbb{N}$ particules

Nous avons vu comment interpréter le PFD comme un principe variationnel dans le cas d'un point matériel seul, soumis à un potentiel extérieur. Il est alors naturel de se poser la question de l'existence d'un principe variationnel pour des systèmes mécaniques plus complexes comportant plusieurs particules.

On considère $N \in \mathbb{N}$ particules matérielles, de masses m_a et repérées par leurs coordonnées $\mathbf{x}^{(a)}$. Ces particules peuvent interagir entre elles et/ou avec l'extérieur. Dans ce cas, le lagrangien est donné par la somme des énergies cinétiques moins la somme des énergies potentielles :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^{(a)}, \dot{\mathbf{x}}^{(a)}, t) = \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_a \left(\dot{x}_i^{(a)}\right)^2 - V(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}), \quad (2.15)$$

où le potentiel V contient les différents termes d'interactions entre particules ou avec des sources extérieures. Dans le cas où les particules n'interagissent pas entre elles, on a alors juste additivité du lagrangien puisque le potentiel V se décompose en une somme de potentiels $V^{(a)}$ indépendants les uns des autres.

EXEMPLE 5. Le problème gravitationnel à deux corps.

On considère deux particules massives ponctuelles M_1 et M_2 , respectivement de masses m_1 et m_2 , repérées par les positions $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ interagissant par l'intermédiaire d'un potentiel V dépendant uniquement de la distance entre les particules. Ce potentiel peut-être, par exemple, un potentiel gravitationnel. Le lagrangien d'un tel système est alors donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^{(1)}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^{(2)}\right)^2 - V(|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|). \quad (2.16)$$

En mécanique newtonienne, la résolution classique de ce problème est de considérer la dynamique du centre de masse du système et celle d'une particule réduite. On pose :

$$\mathbf{X} = \frac{m_1 \mathbf{x}^{(1)} + m_2 \mathbf{x}^{(2)}}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}, \quad (2.17)$$

et on définit la masse totale et la masse réduite du système :

$$M = m_1 + m_2 \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.18)$$

En introduisant ces variables au niveau du lagrangien, on est en mesure d'écrire :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{X}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|). \quad (2.19)$$

Le lagrangien obtenu $\mathcal{L}'$ peut être vu comme la somme de deux lagrangiens, l'un donnant la dynamique d'une particule libre de masse M repérée par $\mathbf{X}$ et associée au centre de masse, l'autre donnant la dynamique d'une particule de masse μ repérée par $\mathbf{r}$ dans un potentiel V et associée à la particule réduite. Comme aucun terme ne couple les variables $\mathbf{X}$ et $\mathbf{r}$, on en déduit que les deux dynamiques sont complètement découplées et évoluent indépendamment l'une de l'autre. L'écriture des équations d'Euler-Lagrange permet d'obtenir les deux équations suivantes :

$$M\ddot{\mathbf{X}} = 0 \quad \text{et} \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{r}}, \quad (2.20)$$

où $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\mathbf{r}$.

EXERCICE 15. ★ Pendule accroché à un ressort.

On considère une masse M astreinte à se déplacer sur un axe horizontal (Ox) , repérée par son abscisse x . Cette masse est reliée à l'origine par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0 . On attache à cette masse un pendule pesant, de masse m , de longueur l (inextensible), repéré dans le plan par des coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Le système est représenté figure 2.1.

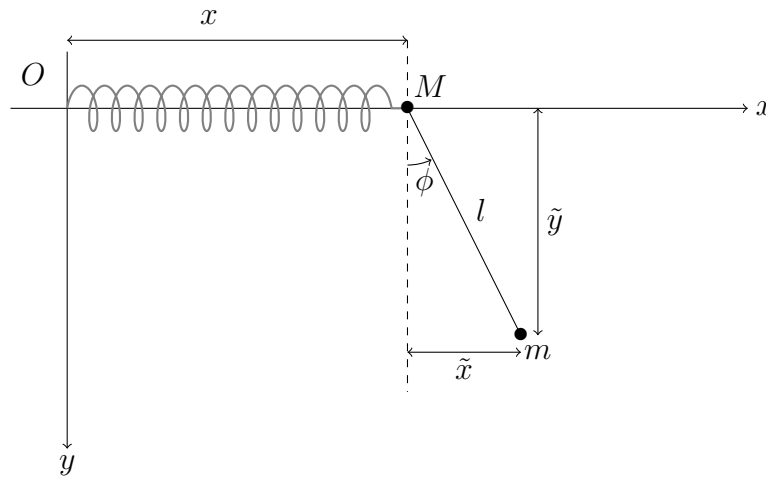


FIGURE 2.1 – Pendule dont une extrémité est attachée à un ressort.

1. On note ϕ l'angle que fait le pendule avec la verticale. Exprimer les énergies cinétiques et potentielles des deux masses en fonction de x , ϕ , et des dérivées temporelles $\dot{x}$ et $\dot{\phi}$.
2. En déduire le lagrangien du système et écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Traiter le problème par une approche newtonienne (PFD, forces de tension, ...) et montrer que l'on retrouve les mêmes équations. Comparer les deux méthodes.

EXERCICE 16. ★ Pendule double oscillant dans le plan.

On considère un système de double pendule : un premier pendule pesant de masse m_1 et de longueur l_1 (inextensible) est attaché à l'origine du repère ; un second pendule pesant de masse m_2 et de longueur l_2 (inextensible) est accroché à l'extrémité du premier pendule. Le système est représenté figure 2.2.

1. On note ϕ_1 (respectivement ϕ_2) l'angle entre le premier (respectivement le second) pendule et la verticale. Exprimer les énergies cinétiques et potentielles des deux masses en fonction de ϕ_1 , ϕ_2 , et des dérivées temporelles $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$.

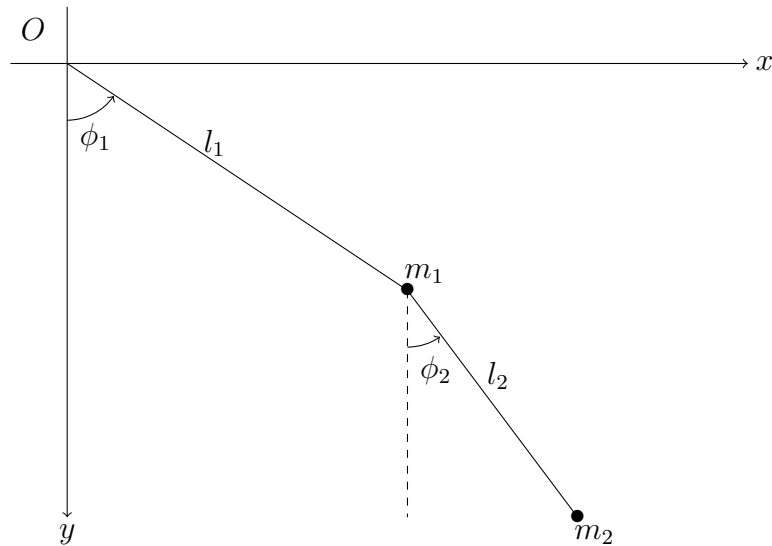


FIGURE 2.2 – Pendule double.

2. Écrire le lagrangien du système et les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Traiter le problème par une approche newtonienne et montrer que l'on obtient les mêmes équations. Comparer les deux méthodes.

2.3 Optimisation sous contraintes

L'objectif de cette section est de donner un aperçu des problèmes *sous contraintes*, c'est-à-dire des optimisations réalisées avec une (ou plusieurs) donnée(s) imposée(s) : longueurs, aires, énergies, nombre de particules... Du point de vue variationnel, la méthode dite des multiplicateurs de Lagrange permet de résoudre de tels problèmes dans de nombreux cas.

2.3.1 Formulation et classification des contraintes

Une **contrainte** est une réduction du nombre de degrés de liberté du système. On distingue différents types de contraintes :

- Les contraintes holonomes, qui peuvent être formulées comme une équation algébrique sur les coordonnées généralisées caractérisant le système ;
- Les contraintes non holonomes, qui ne peuvent pas s'écrire sous cette forme. Les contraintes non holonomes s'expriment, par exemple, sous la forme d'inéquations.

REMARQUE 5. Contraintes semi-holonomes

Lorsque la contrainte s'écrit sous la forme d'une équation algébrique faisant intervenir les coordonnées généralisées ainsi que les vitesses généralisées, elle est non holonome. On parle toutefois de contraintes semi-holonomes car elles sont analogues, pour le système considéré, à des contraintes holonomes.

EXEMPLE 6. Contraintes holonome et non holonome

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on prend $R \in \mathbb{R}$. Attacher un point matériel (x, y) à un cercle de rayon R revient à écrire la contrainte holonome $x^2 + y^2 = R^2$. Contraindre ce même point à rester dans le disque de rayon R revient à écrire la contrainte non holonome $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Par la suite, on s'intéressera uniquement aux contraintes holonomes, plus faciles à formuler. Celles-ci sont dites

- rhéonomes, si elles dépendent du paramètre (généralement, le temps) ;

— scléronomes, si elles n'en dépendent pas.

Une contrainte holonome ou semi-holonome peut s'exprimer comme une fonction g des variables généralisées $\mathbf{x}$ et $\dot{\mathbf{x}}$, et du paramètre t , qui vérifie l'égalité :

$$g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0, \quad (2.21)$$

sur tout le domaine. Cette condition assure que la contrainte est toujours vraie, quel que soit le point de l'espace des phases considéré.

EXEMPLE 7. Pendule simple

On considère un pendule pesant dans $\mathbb{R}^3$: une bille de masse m est maintenue à l'extrémité d'une tige rigide de longueur l et de masse négligeable dont l'autre extrémité est maintenue fixe à l'origine du repère. Le mouvement de la masse en fonction du temps est décrit par les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. La tige rigide impose une contrainte holonome :

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (2.22)$$

On remarque que, dans cet exemple, il y a 3 coordonnées et 1 contrainte, donc $3 - 1 = 2$ degrés de liberté : cela correspond aux deux angles nécessaires pour repérer la position du pendule sur une sphère de rayon l fixé.

EXERCICE 17. ★ Roulement sans glissement

On considère une bille de rayon R roulant sans glissement sur un plan incliné. On repère par y la position du point de contact de la bille sur le plan (l'axe $\mathbf{e}_y$ est pris parallèle au plan) et on note θ l'angle de rotation de la bille.

1. Justifier que le roulement sans glissement impose la relation :

$$\frac{dy}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.23)$$

2. Écrire cette relation sous la forme d'une contrainte holonome.

2.3.2 Multiplicateurs de Lagrange

On considère m contraintes semi-holonomes $\mathbf{g}_k$, fonctions des coordonnées et des vitesses généralisées, ainsi que du paramètre. Ces contraintes s'ajoutent au lagrangien initial par l'intermédiaire de fonctions appelés **multiplicateurs de Lagrange** et notés λ_k , de sorte que :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t; \{\lambda_k\}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) g_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (2.24)$$

soit le nouveau lagrangien du système. Les λ_k peuvent être, selon les cas, des fonctions du paramètre t . On remarquera que l'écriture du lagrangien est de fait inchangée puisque les contraintes vérifient $g_k = 0$ sur tout le domaine. Le principe de moindre action conduit alors à de nouvelles équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \left[\lambda_k \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g_k}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) - \dot{\lambda}_k \frac{\partial g_k}{\partial \dot{x}_i} \right]. \quad (2.25)$$

En pratique, les équations d'Euler-Lagrange portant sur les coordonnées généralisées donnent des équations sous contraintes, tandis que celles sur les multiplicateurs de Lagrange permettent de retrouver les contraintes imposées.

REMARQUE 6. Origine des multiplicateurs de Lagrange

En dérivant les équations d'Euler-Lagrange à partir du principe de moindre action, les coordonnées généralisées sont supposées indépendantes les unes des autres. Ce n'est plus le cas lorsque des contraintes sont introduites, puisque le nombre de degrés de liberté est réduit. Les multiplicateurs de Lagrange permettent de résoudre ce problème en rétablissant artificiellement l'indépendance des coordonnées généralisées dans ce calcul.

EXEMPLE 8. Problème isopérimétrique, ou problème de Didon

On considère deux points $A(x_A, 0)$ et $B(x_B, 0)$ dans un repère cartésien (O, x, y) , et une corde de longueur l_0 reliant ces deux points. Quelle est la courbe décrite par la corde permettant de maximiser l'aire se trouvant entre celle-ci et le segment $[AB]$?

La courbe décrit une trajectoire $x \mapsto y(x)$, l'aire peut donc s'écrire sous la forme d'une intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_{x_A}^{x_B} y(x) dx. \quad (2.26)$$

Il s'agit d'une action qu'il faut chercher à maximiser. La contrainte sur la longueur de la corde, elle, s'exprime comme :

$$l - l_0 = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx - l_0 = 0, \quad (2.27)$$

où l est la longueur de la corde et l_0 la longueur imposée (voir chapitre 1 exemple 3 pour le calcul de l). En introduisant un multiplicateur λ pour cette contrainte, le lagrangien considéré est finalement :

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}, x; \lambda) = y - \lambda \left(\sqrt{1 + \dot{y}^2} - l_0 \right). \quad (2.28)$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée est alors :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad (2.29)$$

qui conduit à :

$$-\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) - 1 = 0. \quad (2.30)$$

Pour la résoudre, on intègre une première fois par rapport à x :

$$\lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = -x + C, \quad (2.31)$$

puis on exprime $\dot{y}$ en fonction de x :

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{(x - C)^2}{\lambda^2 - (x - C)^2}} \quad (2.32)$$

et on intègre à nouveau :

$$y - C' = \sqrt{\lambda^2 - (x - C)^2}. \quad (2.33)$$

En élevant au carré, on obtient :

$$(y - C')^2 + (x - C)^2 = \lambda^2. \quad (2.34)$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle, de centre $(x = C, y = C')$ et de rayon λ .

On peut terminer la résolution comme suit :

- d'une part, le problème étant symétrique en inversant les points A et B , on a nécessairement une position du centre $x_C = (x_A + x_B)/2$
- d'autre part, si on considère un cercle de périmètre l_0 , alors l'arc de cercle reliant A à B correspond à une fraction (déterminée par l'angle) de ce périmètre et si le centre du cercle a pour ordonnée y_C , on a un angle ACB valant, en radians, $\alpha = 2 \arcsin((x_C - x_A)/\lambda)$. Pour trouver la valeur de λ , on doit résoudre l'équation $l_0 = \lambda\alpha$. On peut alors obtenir λ et, ensuite, obtenir y_C .

EXERCICE 18. ★ Problème isopérimétrique, version triangle

On considère un triangle de côtés a, b, c . On admettra que son aire est donnée par la formule de Héron :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}. \quad (2.35)$$

On cherche à déterminer une relation sur a, b et c permettant de maximiser l'aire du triangle à périmètre l fixé.

1. Justifier que maximiser l'aire est équivalent à maximiser $\frac{1}{4}((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4))$.
2. Écrire la condition portant sur le périmètre sous la forme d'une contrainte holonome.
3. Écrire le lagrangien $\mathcal{L}(a, b, c; \lambda)$ associé, où l'on a introduit un multiplicateur λ .
4. Donner les équations d'Euler-Lagrange associées. Vérifier que celle portant sur λ permet de retrouver la contrainte, et que celles sur a, b et c sont symétriques par permutation cyclique des trois variables.
5. Vérifier que $a = b = c = l/3$ est solution du système (on admettra que c'est la seule). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 19. ★ Volume vs. surface d'un cylindre

On considère un cylindre de rayon R et de hauteur H . On cherche à déterminer les dimensions R et H qui minimisent la surface S du cylindre pour un volume V donné.

1. Quelle est la quantité à minimiser ? En déduire l'expression du lagrangien en fonction des variables R et H .
2. Formuler la contrainte $g(R, H, V)$.
3. Le lagrangien dépend donc de deux variables R et H et d'un multiplicateur λ . Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
4. Résoudre le système.

EXERCICE 20. ★ Corde pesante et caténoïde

On se place dans le plan (x, z) où z est la coordonnée donnée par la verticale ascendante. On considère une corde de masse linéique μ et de longueur l_0 fixée en deux points $A(0, 0)$ et $B(x_B, 0)$, avec $x_B < l$. La corde est supposée inélastique. On cherche à déterminer la forme de la corde lorsque celle-ci est au repos, c'est-à-dire uniquement soumise à son propre poids.

1. Exprimer et paramétriser l'élément de longueur dl de la corde.
2. Que vaut l'énergie potentielle dV d'un élément de corde dl ?
3. Quelle est alors la quantité à minimiser ?
4. Quelle est la contrainte à respecter ?
5. Donner le lagrangien correspondant, en introduisant un multiplicateur de Lagrange.
6. Établir l'équation d'Euler-Lagrange correspondante et la résoudre.

EXERCICE 21. ★★ Corde pesante et caténoïde (extension)

Reprendre le problème précédent en considérant que les extrémités de la corde sont fixées en deux points $A(0, 0)$ et $B(x_B, z_B)$.

EXERCICE 22. ★★★ Formulation variationnelle de l'entropie

On s'intéresse ici à donner une formulation de l'entropie par l'intermédiaire d'un principe variationnel.

1. Justifier que l'entropie peut s'exprimer sous la forme d'une fonctionnelle :

$$S = \int -k_B \rho(x) \ln[\rho(x)] dx, \quad (2.36)$$

où $\rho(x)$ est une fonction de densité que l'on interprétera.

2. Justifier que l'on a une contrainte holonome :

$$\int \rho(x) dx - 1 = 0. \quad (2.37)$$

3. Du fait de la partition en énergie et en nombre de particules, justifier que le système est soumis à deux autres contraintes holonomes :

$$\int \rho(x) E(x) dx - \bar{E} = 0, \quad (2.38)$$

et

$$\int \rho(x) N(x) dx - \bar{N} = 0. \quad (2.39)$$

4. Écrire le lagrangien associé à l'entropie contrainte. On notera respectivement λ_1 , λ_2 et λ_3 les multiplicateurs associés à la densité, à l'énergie et au nombre de particules.
5. En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, montrer que :

$$-k_B \ln(\rho) - k_B - \lambda_1 - \lambda_2 E - \lambda_3 N = 0. \quad (2.40)$$

6. En déduire l'expression de ρ en fonction de k_B , E , N , et des multiplicateurs de Lagrange.
7. En utilisant la condition de normalisation de la question 2, montrer que ρ s'écrit sous la forme :

$$\rho(x) = \frac{1}{\Xi} e^{-\frac{\lambda_2}{k_B} E(x) - \frac{\lambda_3}{k_B} N(x)}, \quad (2.41)$$

où Ξ est la fonction de partition grand-canonique du système.

8. Montrer que l'entropie S s'écrit alors :

$$S = k_B \ln \Xi + \lambda_2 \bar{E} + \lambda_3 \bar{N}. \quad (2.42)$$

9. En calculant les dérivées partielles de S par rapport à $\bar{E}$ et $\bar{N}$, montrer que :

$$\lambda_2 = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\mu}{T}. \quad (2.43)$$

10. En déduire les expressions de ρ et de Ξ .

Ce chapitre présente la formulation hamiltonienne de la mécanique analytique, formellement équivalente à la formulation lagrangienne. Dans toute cette partie on considère un système décrit par un lagrangien $\mathcal{L}$, fonction des coordonnées généralisées q , des vitesses généralisées $\dot{q}$ et du paramètre t , et d'action :

$$\mathcal{S}[q] = \int_a^b \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \quad (3.1)$$

3.1 Moments conjugués et hamiltonien

Dans le formalisme hamiltonien, on définit le **moment conjugué** p_i de la coordonnée généralisée q_i à partir du lagrangien du système :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.2)$$

On peut alors récrire très simplement les équations d'Euler-Lagrange sous la forme :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \quad (3.3)$$

On définit le **hamiltonien** du système, noté $\mathcal{H}$, comme la transformée de Legendre du lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}. \quad (3.4)$$

En calculant la dérivée totale du hamiltonien par rapport au temps, on obtient l'équation temporelle du hamiltonien :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Une conséquence directe de cette équation est que le hamiltonien est conservé si et seulement si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

EXEMPLE 9. Point matériel soumis à un potentiel.

On considère un point matériel de masse m plongé dans un potentiel extérieur V . Comme établi au précédent chapitre, le lagrangien d'un tel système est donné par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t). \quad (3.6)$$

Le moment conjugué à la coordonnée x_i est alors :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad (3.7)$$

et coïncide avec la quantité de mouvement. Le hamiltonien du système s'écrit donc :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

Le hamiltonien correspond ici à l'énergie mécanique de la particule matérielle. Cette énergie est conservée si et seulement si elle ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire si et seulement si le potentiel V ne dépend pas explicitement du temps. Il s'agit de la loi de conservation de l'énergie mécanique associée aux potentiels conservatifs.

EXERCICE 23. ★ Intégrale de Painlevé.

On considère une particule de masse m repérée par ses coordonnées $\mathbf{x}$, soumise à un potentiel $V(\mathbf{x}, t)$. La dynamique de cette particule est donnée par le lagrangien $\mathcal{L} = T - V$ où T est l'énergie cinétique de la particule. On choisit un système de coordonnées $\mathbf{q}$, pouvant dépendre du temps, telles que la position $\mathbf{x}$ s'écrive comme une fonction de $\mathbf{q}$ et t : $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{q}, t)$.

1. Exprimer la vitesse $\dot{\mathbf{x}}$ en fonction de $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ et t , à l'aide des dérivées partielles de χ .
2. En déduire que l'énergie cinétique s'écrit comme $T = T_2 + T_1 + T_0$, avec T_n homogène de degré n en les vitesses généralisées q_i . Montrer que T_0 et T_1 sont nuls si la fonction χ est indépendante du temps.
3. Démontrer que le hamiltonien du système s'écrit $\mathcal{H} = T_2 - T_0 + V$.

Indication : la formule d'Euler pour une fonction f , homogène de degré n en les variables u_i , s'écrit :

$$\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = nf(u). \quad (3.9)$$

EXERCICE 24. ★ Moments conjugués et hamiltonien d'une particule chargée.

On utilise les conventions et notations de l'exercice 12 traitant le cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. On cherche à transposer ce problème dans la formulation hamiltonienne.

1. Déterminer les moments conjugués p_i associés aux coordonnées x_i . Comparer au cas d'une particule dans un potentiel.
2. Écrire le hamiltonien du système. A-t-il une interprétation énergétique ? Quand est-il conservé ?
3. On considère un champ électrique constant $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$. On choisit comme potentiels électrique et magnétique $\phi = -E_0 z$ et $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Écrire le lagrangien $\mathcal{L}$ et le hamiltonien $\mathcal{H}$ du système. Le hamiltonien est-il conservé ?
4. On considère toujours le même champ électrique constant, mais on se place dans une autre jauge : $\phi' = 0$ et $\mathbf{A}' = -E_0 t \mathbf{e}_z$. Écrire les nouveaux lagrangien $\mathcal{L}'$ et hamiltonien $\mathcal{H}'$. À l'aide du résultat (3.5), montrer que l'on retrouve la quantité conservée de la question précédente.

3.2 Équations de Hamilton

La transformation de Legendre effectuée sur le lagrangien permet de passer d'un système de coordonnées à un autre : alors que les variables du lagrangien sont les coordonnées et vitesses

généralisées q et $\dot{q}$, celles du hamiltonien sont les coordonnées généralisées q et leurs moments conjugués p . Par construction, le hamiltonien ne dépend plus des vitesses généralisées $\dot{q}$.

Les moments conjugués p sont, par définition, des fonctions de q , $\dot{q}$ et t . Pour supprimer toute mention des vitesses généralisées dans la formulation hamiltonienne, on suppose que la relation entre p et $\dot{q}$ est inversible, c'est-à-dire que l'on peut exprimer les vitesses généralisées $\dot{q}_i$ en fonction des moments conjugués p . Cette hypothèse est vérifiée dans la grande majorité des cas que l'on peut rencontrer en mécanique. Du point de vue mathématique, cela signifie qu'il existe une fonction ν de (q, p, t) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\dot{q}_i = \nu_i(q, p, t), \quad (3.10)$$

soit encore :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \nu(q, p, t), t) = p_i. \quad (3.11)$$

Dans toute la suite, on va considérer que ce changement de variables $(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, p, t)$ existe et a été effectué. Le nouvel espace des variables (q, p) est appelé **espace des phases**. Le hamiltonien, comme toute autre quantité qui nous intéresse, est donc une fonction de l'espace des phases et du paramètre t . Les dérivées partielles par rapport à q et à p sont ainsi à prendre en considérant respectivement p et q constant. On considèrera alors le hamiltonien comme la fonction de q , p et t suivante :

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \nu_i(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \nu(q, p, t), t). \quad (3.12)$$

Calculons la dérivée du hamiltonien par rapport au moment conjugué p_i :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^n \nu_j(q, p, t) p_j - \mathcal{L}(q, \nu(q, p, t), t) \right) \quad (3.13)$$

$$= \nu_i(q, p, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu_j}{\partial p_i}(q, p, t) p_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu_j}{\partial p_i}(q, p, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(q, \nu(q, p, t), t) \quad (3.14)$$

$$= \nu_i(q, p, t) \quad (3.15)$$

$$= \dot{q}_i, \quad (3.16)$$

De même, la dérivée du hamiltonien par rapport aux coordonnées généralisées q_i s'exprime :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \nu_j(q, p, t) p_j - \mathcal{L}(q, \nu(q, p, t), t) \right) \quad (3.17)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu_j}{\partial q_i}(q, p, t) p_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \nu(q, p, t), t) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu_j}{\partial q_i}(q, p, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(q, \nu(q, p, t), t) \quad (3.18)$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \nu(q, p, t), t) \quad (3.19)$$

$$= -\dot{p}_i, \quad (3.20)$$

Les équations ainsi obtenues sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange et sont appelées **équations de Hamilton** :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (3.21)$$

Les équations de Hamilton peuvent également être utilisées pour déterminer l'évolution temporelle du hamiltonien. On peut calculer sa dérivée totale par rapport au temps :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{H}(q(t), p(t), t)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right), \quad (3.22)$$

d'où l'on déduit l'équation d'évolution du hamiltonien :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (3.23)$$

EXEMPLE 10. Point matériel soumis à un potentiel.

On considère un point matériel de masse m plongé dans un potentiel extérieur V . Le hamiltonien du système est associé à l'énergie mécanique de la particule et s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}, t). \quad (3.24)$$

La première équation de Hamilton redonne la définition lagrangienne des p_i :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m}, \quad (3.25)$$

et la seconde équation est équivalente à l'équation d'Euler-Lagrange (donc au PFD) :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i. \quad (3.26)$$

On décrit donc bien la dynamique du problème grâce aux équations de Hamilton.

EXERCICE 25. ★★ Particule chargée dans un champ électromagnétique et hamiltonien.

On utilise les notations introduites dans les exercices 12 et 18. On cherche à retrouver la dynamique d'une particule chargée par la formulation hamiltonienne du problème.

1. Les moments conjugués et la hamiltonien du système, en tant que fonctions de $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ et t , ont déjà été calculés. Utiliser ces résultats pour exprimer le hamiltonien comme une fonction sur l'espace des phases (c'est-à-dire comme une fonction de $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ et t).
2. Écrire la première équation de Hamilton et retrouver la relation entre $\dot{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{p}$.
3. Écrire la seconde équation de Hamilton et retrouver le PFD pour une particule chargée.

EXERCICE 26. ★★★ Encore !

Reprendre les exemples et les exercices traités dans le chapitre précédent grâce aux équations d'Euler-Lagrange et les transposer dans le formalisme hamiltonien. On pourra notamment :

1. écrire les différents moments conjugués et le hamiltonien du système en fonction de $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ et t ;
2. s'intéresser aux propriétés du hamiltonien : est-il conservé ? a-t-il une interprétation énergétique ? ;
3. effectuer, lorsqu'elle est possible, la transformation $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \mathbf{p}$, et exprimer alors le hamiltonien en fonction de $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ et t ; et
4. écrire les équations de Hamilton et les comparer à celles d'Euler-Lagrange.

3.3 Crochets de Poisson

Une fonction définie sur l'espace des phases, dépendant des variables q , p et t , est appelée un **observable**. L'ensemble des observables joue un rôle primordial en mécanique hamiltonienne car il est muni du **crochet de Poisson**. Pour f et g deux observables, le crochet de Poisson de f et g est une nouvelle observable notée $\{f, g\}$ et définie par :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (3.27)$$

Le crochet de Poisson vérifie les propriétés suivantes :

1. l'antisymétrie : $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
2. la règle de Leibniz : $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$;
3. l'identité de Jacobi : $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$; et
4. la composition : si ϕ est une fonction de $\mathbb{R}^l$ vers $\mathbb{R}$:

$$\{f, \phi(g_1, \dots, g_p)\} = \sum_{i=1}^p \{f, g_i\} \frac{\partial \phi}{\partial g_i}(g_1, \dots, g_p). \quad (3.28)$$

L'antisymétrie est évidente à partir de la définition du crochet de Poisson. La règle de Leibniz et la composition se démontrent en utilisant les propriétés des dérivées partielles. L'identité de Jacobi s'obtient en écrivant tous les crochets de Poisson et leurs dérivées, et en montrant que tous les termes s'annulent.

De façon évidente on peut calculer les crochets de Poisson élémentaires :

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (3.29)$$

Soit $\mathcal{O}$ une observable quelconque. Le crochet de Poisson de $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{H}$ s'exprime, grâce aux équations de Hamilton :

$$\{\mathcal{H}, \mathcal{O}\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial p_i} \right) = \frac{d\mathcal{O}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t}. \quad (3.30)$$

La dynamique de toute observable $\mathcal{O}$ est donc donnée par :

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{O}\} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t}. \quad (3.31)$$

En choisissant comme observables particulières $\mathcal{O} = q_i$ et $\mathcal{O} = p_i$, on remarque que l'on retrouve les équations de Hamilton pour l'évolution temporelle de p_i et q_i . Cette formulation est donc équivalente aux équations de Hamilton. De plus, en prenant $\mathcal{O} = \mathcal{H}$, on ré-obtient l'équation d'évolution temporelle du hamiltonien :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (3.32)$$

EXEMPLE 11. Dynamique d'une observable.

On illustre ici la formule (3.31). Pour cela, on considère une particule de masse m , repérée par sa position $\mathbf{x}$ et soumise à un potentiel de la forme K/r^2 avec K une constante et $r = |\mathbf{x}|$. Le hamiltonien du système est donné par :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{K}{r^2}. \quad (3.33)$$

Comme il ne dépend pas explicitement du temps, il s'agit d'une constante du mouvement. On pose $\mathcal{V} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$. On obtient alors les crochets de Poisson suivants :

$$\{p_i, \mathcal{V}\} = p_i \quad \text{et} \quad \{x_i, \mathcal{V}\} = -x_i. \quad (3.34)$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\{|\mathbf{p}|^n, \mathcal{V}\} = n|\mathbf{p}|^n \quad \text{et} \quad \{r^n, \mathcal{V}\} = -nr^n, \quad (3.35)$$

d'où :

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{V}\} = 2\mathcal{H}. \quad (3.36)$$

Le hamiltonien $\mathcal{H}$ étant constant au cours du temps, une première intégration donne :

$$\mathcal{V} = 2\mathcal{H}t + \mathcal{V}_0, \quad (3.37)$$

avec $\mathcal{V}_0$ une constante d'intégration, égale à $\mathcal{V}(t=0)$. Or :

$$\mathcal{V} = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} r^2. \quad (3.38)$$

On en déduit donc l'évolution temporelle de la distance r à l'origine :

$$r(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}t^2 + 2\mathcal{V}_0t + C}{m}}, \quad \text{avec } C \text{ constante.} \quad (3.39)$$

EXERCICE 27. ★★ Crochets de Poisson du moment cinétique (sujet C 2010, question B.III.3)

On considère un vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ et le moment conjugué $\mathbf{p}$ associé. On définit le moment cinétique $\mathbf{L}$ comme le vecteur $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. En notations indicielles, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$, avec ϵ_{ijk} le tenseur de Levi-Civita totalement antisymétrique, et avec une sommation sous-entendue sur les indices répétés.

1. Calculer les crochets de Poisson $\{L_i, p_j\}$ et $\{L_i, x_j\}$.
2. En déduire le crochet de Poisson $\{L_i, L_j\}$.
3. Établir que $\{L_i, |\mathbf{p}|\} = 0$ et $\{L_i, |\mathbf{x}|\} = 0$.
4. En déduire que pour le mouvement d'une particule dans un potentiel central $V(|\mathbf{x}|)$ indépendant du temps, le moment cinétique $\mathbf{L}$ est une constante du mouvement.

EXERCICE 28. ★★★★★ Problème de Kepler et vecteur de Runge-Lenz (sujet C 2010).

On considère le problème de Kepler, c'est-à-dire le mouvement de deux particules massives interagissant par interaction gravitationnelle. On travaillera ici avec la particule réduite, de position $\mathbf{x}$, soumise à un potentiel central $V(r) = -K/r$, où $r = |\mathbf{x}|$. Le hamiltonien du système s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} |\mathbf{p}|^2 + V(r). \quad (3.40)$$

On pourra réutiliser les résultats de l'exercice précédent. Ici, les calculs des crochets de Poisson vont en difficulté croissante et le dernier est assez laborieux ... avis aux plus courageux !

1. On définit le vecteur de Runge-Lenz :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \mathbf{p} + mK \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad (3.41)$$

soit, en notation indicielle :

$$A_i = \epsilon_{ijk} L_j p_k + mK \frac{x_i}{r}. \quad (3.42)$$

Calculer les crochets de Poisson de A_i avec x_j , p_j , r et $|\mathbf{p}|$.

2. En déduire que $\mathbf{A}$ est une constante du mouvement.
3. Calculer le crochet de Poisson de A_i avec L_j .
4. Calculer le crochet de Poisson de A_i avec A_j .

Symétries et théorème de Noether

On s'intéresse à l'étude et à la formulation des symétries dans le formalisme lagrangien. On montrera en particulier que celles-ci sont associées à une invariance du lagrangien décrivant le système et qu'elles sont intrinsèquement liées à l'existence de quantités conservées, appelées charges, données par le théorème de Noether.

4.1 Symétries d'un système lagrangien

On considère un système lagrangien, décrit par ses coordonnées et vitesses généralisées $\mathbf{q}$ et $\dot{\mathbf{q}}$, et un paramètre t . La dynamique du système, auquel on associe un lagrangien $\mathcal{L}$, est donnée par les équations d'Euler-Lagrange. Il s'agit d'équations différentielles du second ordre sur les coordonnées généralisées que l'on peut écrire sous la forme condensée :

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0. \quad (4.1)$$

Soit une transformation inversible des coordonnées généralisées : $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}' = f(\mathbf{q}, t)$. On a établi précédemment la **covariance** des équations d'Euler-Lagrange, c'est-à-dire que les équations d'Euler-Lagrange sur $\mathbf{q}$ avec le lagrangien $\mathcal{L}$ sont équivalentes à celles sur $\mathbf{q}'$ avec un lagrangien $\mathcal{L}'$ tel que :

$$\mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (4.2)$$

De façon synthétique, on écrit une nouvelle fois :

$$\mathcal{D}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', \ddot{\mathbf{q}}', t) = 0. \quad (4.3)$$

On dit alors que la transformation est une **symétrie** des équations du mouvement si les fonctions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **identiques**.

Une condition nécessaire pour obtenir ce résultat est que les lagrangiens $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ diffèrent d'une dérivée totale :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}. \quad (4.4)$$

Il s'agit en fait d'une condition suffisante (on admettra ce résultat). En utilisant l'équation de covariance, on obtient alors :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}(\mathbf{q}, t). \quad (4.5)$$

On qualifie alors la transformation $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}'$ de **symétrie du lagrangien** $\mathcal{L}$, ou on dit que le **lagrangien** $\mathcal{L}$ est **invariant** sous la transformation $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}'$.

REMARQUE 7. Covariance vs. invariance.

Il ne faut pas confondre la covariance (équivalence des équations d'Euler-Lagrange) et l'invariance (mêmes équations d'Euler-Lagrange).

4.2 Transformations continues et symétries infinitésimales

On considère une famille de transformations de coordonnées $q \mapsto q^{(\alpha)} = f(q, t, \alpha)$, dépendant "lissement" d'un paramètre réel α , et telle que la transformation pour $\alpha = 0$ soit triviale, c'est-à-dire : $f(q, t, \alpha = 0) = q$. On dit que cette transformation est une **symétrie continue** du lagrangien $\mathcal{L}$ si elle est une symétrie pour toute valeur du paramètre α . En utilisant la définition d'une symétrie établie dans la section précédente, on en déduit que la transformation est une symétrie continue de $\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe une fonction $\mathcal{G}$ de q, t et α telle que :

$$\mathcal{L}(q^{(\alpha)}, \dot{q}^{(\alpha)}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, t, \alpha). \quad (4.6)$$

Dans ce cas, on sait de plus que $\mathcal{G}(q, t, \alpha = 0) = 0$ car la transformation f est égale à l'identité pour $\alpha = 0$.

On considère maintenant le cas d'une transformation infinitésimale proche de l'identité, c'est-à-dire qu'on étudie la transformation ci-dessus pour un paramètre $\alpha = \epsilon + o(\epsilon)$ pour laquelle on effectue un développement limité à l'ordre 1 en ϵ . La coordonnée transformée $q^{(\alpha)}$ dépendant de α de manière lisse et étant égale à q pour $\alpha = 0$, on peut écrire à l'ordre 1 en ϵ que :

$$q^{(\alpha)} = q + \delta q = q + \epsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha}(q, t, \alpha = 0) + o(\epsilon). \quad (4.7)$$

De même, on développe $\mathcal{G}$ à l'ordre 1 en ϵ comme $\mathcal{G}(q, t, \alpha) = \epsilon \mathcal{F}(q, t) + o(\epsilon)$. En développant la condition de symétrie continue à l'ordre 1 en ϵ , on obtient :

$$\delta \mathcal{L} := \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \epsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt} + o(\epsilon). \quad (4.8)$$

On parle alors de **symétrie infinitésimale** du lagrangien $\mathcal{L}$.

EXEMPLE 12. Oscillateur harmonique 2D et rotation.

Le lagrangien de l'oscillateur harmonique à deux dimensions s'écrit :

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2), \quad (4.9)$$

où m est la masse de la particule, et k une constante de rappel.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie facilement que ce lagrangien est invariant sous la symétrie de rotation :

$$\begin{aligned} x &\mapsto x^{(\alpha)} = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, \\ y &\mapsto y^{(\alpha)} = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y. \end{aligned} \quad (4.10)$$

En écrivant $\alpha = \epsilon + o(\epsilon)$, la transformation infinitésimale s'écrit :

$$\delta x = \epsilon y \quad \text{et} \quad \delta y = -\epsilon x. \quad (4.11)$$

La variation $\delta \mathcal{L}$ du lagrangien à l'ordre 1 en ϵ est alors nulle.

EXEMPLE 13. Particule en chute libre et translation.

Le lagrangien d'une particule de masse m en chute libre s'écrit :

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, t) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz. \quad (4.12)$$

On considère la transformation de translation :

$$z \longmapsto z^{(\alpha)} = z + \alpha. \quad (4.13)$$

Il s'agit d'une symétrie du lagrangien $\mathcal{L}$ car :

$$\mathcal{L}(z^{(\alpha)}, \dot{z}^{(\alpha)}, t) = \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) - mg\alpha = \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) - \frac{d}{dt}(mg\alpha t). \quad (4.14)$$

Au niveau infinitésimal, on a : $\delta z = \epsilon$ et $\delta \mathcal{L} = -\epsilon \frac{d}{dt}(mgt)$.

4.3 Théorème de Noether et quantités conservées

On présente, dans cette sous-section, le théorème de Noether, qui associe à toute symétrie infinitésimale d'un lagrangien une quantité conservée au cours du temps, c'est-à-dire une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange. Il s'agit d'un théorème très général qui a joué un rôle fondateur dans la physique théorique moderne. Nous en donnerons ici un énoncé simplifié, pour éviter des notations et calculs trop compliqués. Dans un premier temps, on s'intéresse à un exemple simple sur le lien entre symétries et lois de conservations.

EXEMPLE 14. Variable cyclique.

On dit qu'une coordonnée généralisée q_i est une **variable cyclique** d'un lagrangien $\mathcal{L}$ si celui-ci n'en dépend pas explicitement, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (4.15)$$

Il est clair que la transformation $q_i \longmapsto q_i + \epsilon$ est une symétrie infinitésimale d'un tel lagrangien. De plus, par les équations d'Euler-Lagrange, on obtient directement que le moment conjugué :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.16)$$

est une quantité conservée au cours du temps. On a donc relié l'invariance du lagrangien par la translation de coordonnée q_i avec la conservation du moment conjugué p_i . On remarque qu'il est facile de généraliser cette loi de conservation au cas où $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ est une dérivée totale.

Dans le cas où la coordonnée q_i considérée est une coordonnée cartésienne d'espace-temps et que l'on considère le lagrangien d'un point matériel, on relie ainsi l'invariance par translation spatiale avec la conservation de la quantité de mouvement. De même, dans l'exemple du problème à deux corps, nous avons obtenu un lagrangien indépendant de la position du centre de masse $\mathbf{X}$: on en déduit la conservation de la quantité de mouvement totale du système $M\mathbf{X}$.

Énonçons à présent le **théorème de Noether**. On utilise les conventions et notations de la sous-section précédente. On considère un lagrangien $\mathcal{L}$ possédant une symétrie infinitésimale :

$$q'_i = q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon g_i(q, t). \quad (4.17)$$

La symétrie revient alors à l'existence d'une quantité $\mathcal{F}$ dépendant de q et t telle que :

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \epsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt} + o(\epsilon). \quad (4.18)$$

Le théorème de Noether stipule alors que la quantité :

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i - \mathcal{F} \quad (4.19)$$

est conservée au cours du temps. On appelle cette grandeur la **charge de Noether** associée à la symétrie.

EXEMPLE 15. Chute libre et quantité conservée.

On reprend l'exemple de la chute libre. On a montré précédemment l'existence d'une symétrie :

$$\delta z = \epsilon \quad \text{et} \quad \delta \mathcal{L} = -\epsilon \frac{d}{dt}(mgt), \quad (4.20)$$

soit, avec les notations introduites : $g_z = 1$ et $\mathcal{F} = -mgt$. L'application du théorème de Noether donne une quantité conservée :

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} g_z - \mathcal{F} = m\dot{z} + mgt. \quad (4.21)$$

Cette loi de conservation est en accord avec l'équation du mouvement : $m\ddot{z} = -mg$.

EXERCICE 29. ★ Variables quasicycliques et théorème de Noether.

On considère un lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. On suppose qu'il existe une coordonnée généralisée q_i et une grandeur $\mathcal{G}(q, t)$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}. \quad (4.22)$$

On dira que q_i est une variable quasicyclique de $\mathcal{L}$.

1. En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée q_i , trouver une intégrale première du mouvement.
2. Relier la définition de la variable quasicyclique q_i à une symétrie du lagrangien $\mathcal{L}$. On pourra penser aux translations de coordonnée q_i .
3. Écrire la charge de Noether associée à cette symétrie et comparer à la grandeur conservée obtenue à la première question.
4. Réinterpréter l'exemple de la chute libre grâce à ces résultats.

EXERCICE 30. ★★ Symétries de rotation et moment cinétique.

On considère un lagrangien, de coordonnées cartésiennes $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de la forme $\mathcal{L} = T - V$ où $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ est l'énergie cinétique et $V = V(r)$ est un potentiel central avec $r = |\mathbf{x}|$.

1. Soit R une matrice de rotation. Montrer que le lagrangien $\mathcal{L}$ est invariant sous la transformation de coordonnées $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R\mathbf{x}$.
2. On se concentre sur les rotations d'axe $(0z)$. La rotation d'angle α est donnée par :

$$x^{(\alpha)} = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, \quad y^{(\alpha)} = \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)x, \quad z^{(\alpha)} = z. \quad (4.23)$$

Écrire la transformation infinitésimale associée et montrer que le lagrangien $\mathcal{L}$ vérifie la condition de symétrie infinitésimale énoncée dans la section précédente.

3. Écrire la charge de Noether associée. Qu'en est-il pour les rotations d'axes (Ox) et (Oy) ? Interpréter.
4. Exprimer le lagrangien $\mathcal{L}'$ du système en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . Étudier la dépendance de $\mathcal{L}'$ en θ . Que peut-on en conclure? Comparer aux questions précédentes.

L'énoncé du théorème de Noether que nous avons donné ici est une version simplifiée d'un résultat plus général. Il correspond au cas d'une transformation de symétrie impliquant seulement les coordonnées : $q \mapsto q' = f(q, t)$.

Une première généralisation possible est de considérer aussi des transformations du paramètre t . Ceci permettrait par exemple de traiter le cas d'une translation temporelle $t \mapsto t' = t + \alpha$. On montrerait alors qu'un lagrangien est invariant sous cette transformation s'il ne dépend pas explicitement du temps. La charge de Noether associée à cette symétrie est le hamiltonien du système. On avait en fait déjà observé ce lien entre invariance temporelle et conservation du hamiltonien dans la partie consacrée à la mécanique hamiltonienne. Ainsi, l'invariance par translation temporelle d'un système mécanique est liée, par le théorème de Noether, à la conservation de l'énergie.

Une autre généralisation possible traite de ce qu'on appelle les symétries dynamiques. Il s'agit de transformations faisant aussi intervenir les vitesses généralisées $\dot{q}_i : q \mapsto q' = f(q, \dot{q}, t)$. Là encore, l'invariance du lagrangien sous ces transformations est liée à la conservation d'une charge de Noether. Un exemple de quantité conservée associée à une symétrie dynamique est le vecteur de Runge-Lenz dans le problème de Kepler.

Nous allons clore cette section par un exercice un peu particulier. Celui-ci est volontairement très vague et donc potentiellement difficile : le but est de laisser la possibilité d'aborder un problème sans questions guidées et de chercher librement les informations que l'on peut en tirer. Il n'est pas attendu une résolution complète du problème mais plutôt une analyse de ce qu'il est possible de dire sur le sujet grâce à une approche de mécanique analytique. Il pourra être bénéfique d'avoir déjà résolu les autres exercices de cette section avant de commencer celui-ci.

EXERCICE 31. ★★ ★ Particule dans un champ magnétique à direction unique (S. Lacroix).

On considère un champ magnétique dirigé selon l'axe (Oz) et dépendant uniquement de la distance à l'axe $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, tel que :

$$\mathbf{B} = f(\rho)\mathbf{e}_z. \quad (4.24)$$

On plonge une particule massive et chargée dans ce champ.

Que peut-on dire sur son mouvement ?

Indication (1) : on suggère d'aborder ce problème avec une approche de mécanique analytique, par exemple lagrangienne.

Indication (2) : on pourra notamment se demander si le système possède des symétries et comment les exploiter.

Ce chapitre est une première approche de la relativité restreinte formulée par Albert Einstein au début du XX^e siècle. L'objectif est de comprendre ce qu'est le principe de relativité et pourquoi la théorie énoncée par Galilée est incomplète pour décrire l'ensemble des invariances des lois physiques.

5.1 Relativité restreinte galiléenne

5.1.1 Transformation de Galilée

Jusqu'à présent, nous avons implicitement supposé que tous les systèmes étaient étudiés dans des **référentiels galiléens**, c'est-à-dire des référentiels dans lesquels les lois de Newton sont vérifiées. Ces référentiels sont associés à la même classe d'observateur, tous en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

De cette caractérisation des référentiels galiléens découle naturellement la **transformée de Galilée**. Soit un référentiel galiléen de référence $\mathcal{R}$, décrit par des coordonnées spatiales (x, y, z) et un temps t , et un second référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, décrit par les coordonnées spatiales (x', y', z') et un temps t' , en translation rectiligne uniforme à vitesse $\mathbf{v}_e$ par rapport à $\mathcal{R}$. Alors, le passage du référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$ s'effectue par la transformation :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}_e t, \\ t &\longmapsto t' = t. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Les lois de la physique fondamentale sont les mêmes dans tout référentiel galiléen (mêmes forces, mêmes lois de Newton ...), elles sont donc invariantes sous la transformée de Galilée. On peut notamment vérifier que les accélérations vues depuis les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont les mêmes en dérivant deux fois le vecteur position par rapport au temps : on obtient immédiatement que $a = a'$.

5.1.2 Principes de relativité restreinte galiléenne

En se basant sur l'hypothèse qu'il existe des référentiels galiléens, et en considérant que les lois de la physique fondamentale sont invariantes sous la transformée de Galilée, on peut identifier les principes clés de la relativité restreinte galiléenne :

1. Il existe des observateurs privilégiés : les observateurs d'inertie. Il s'agit d'observateurs qui savent, de manière absolue, sans faire référence à d'autres observateurs, que leur accélération est nulle. Il s'agit du caractère **restreint** ;
2. Tous les observateurs d'inertie sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Par conséquent, aucun observateur ne peut se déclarer au repos de manière absolue. C'est le caractère **relatif** ;
3. La transformée de Galilée fait qu'il n'y a pas de limite à la vitesse d'un observateur. En particulier, la loi de composition des vitesses s'applique :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e; \quad (5.2)$$

et

4. Les surfaces d'événements simultanés sont décrites, dans l'espace-temps, par la géométrie euclidienne. Ce sont des hyperplans pris à temps constant.

5.1.3 Structure de l'espace-temps galiléen

Afin d'étudier l'évolution d'un système on repère ses positions spatiales au cours du temps. Le système ne pouvant se trouver en deux endroits différents au même temps, il est possible d'indexer les positions par le temps. Cette succession d'instantanés peut-être représentée dans un espace euclidien de dimension 4 que l'on appelle alors **espace-temps**. Un **événement**, c'est-à-dire l'état d'un système donné, y est décrit par l'ensemble de ses coordonnées : une coordonnée temporelle t et trois coordonnées spatiales x , y et z .

Soit deux événements A et B de l'évolution d'un même système. La courbe qui les relie est appelée **ligne d'univers** et elle décrit la succession d'états du système entre les deux événements choisis. Dans le cas où le système considéré est un observateur d'inertie, les lignes d'univers sont des droites dont la pente est la vitesse par rapport à un observateur d'inertie choisi arbitrairement (voir figure 5.1, gauche). Le changement de référentiel d'un observateur d'inertie se fait alors par rotation du repère.

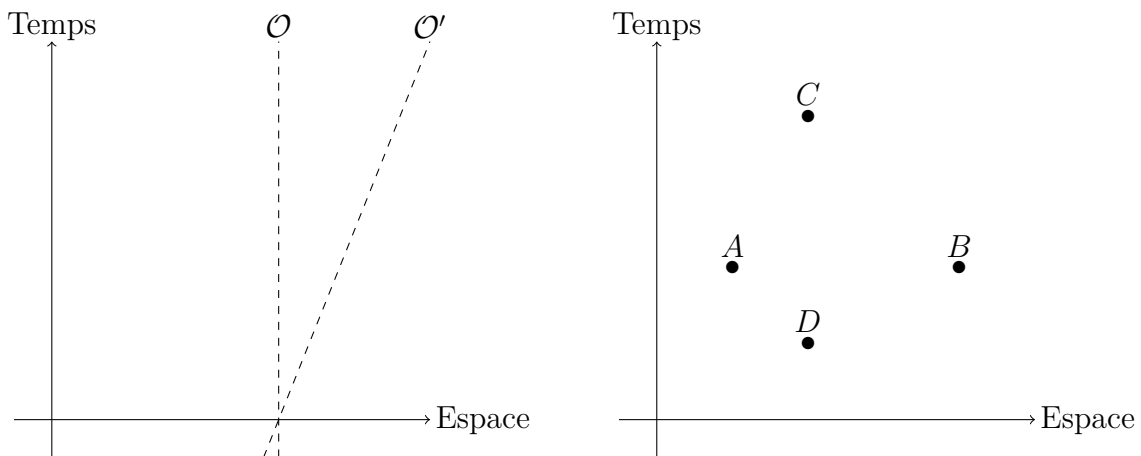


FIGURE 5.1 – Gauche : représentation des lignes d'univers de deux observateurs d'inertie $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$. L'observateur $\mathcal{O}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{O}$. Droite : A , B et C sont trois événements de l'espace-temps. A et B ont les mêmes coordonnées temporelles et sont donc simultanés. D appartient au passé des événements A et B alors que C appartient à leur futur.

Les événements A ($t_A, \mathbf{x}_A$) et B ($t_B, \mathbf{x}_B$), s'ils sont différents, sont toujours séparés par un intervalle temporel, un intervalle spatial, ou les deux. En particulier, si l'intervalle temporel

est nul les deux événements sont simultanés (voir figure 5.1, droite). La transformée de Galilée préserve cette structure :

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = t_B - t_A = \Delta t, \quad (5.3)$$

et :

$$\Delta \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_B - \mathbf{x}'_A = (\mathbf{x}_B - \mathbf{v}_e t) - (\mathbf{x}_A - \mathbf{v}_e t) = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A = \Delta \mathbf{x}. \quad (5.4)$$

Une conséquence importante de ces résultats est l'existence d'une simultanéité absolue : deux événements simultanés pour un observateur d'inertie $\mathcal{O}$ le sont aussi pour tout autre observateur d'inertie $\mathcal{O}'$. Il est alors possible de définir un passé et un futur absolus. En l'absence d'informations sur l'évolution d'un événement, tout l'espace-temps à l'exception de la surface d'événements simultanés lui est accessible : tout événement passé est un probable état passé du système, et tout événement futur est un état qu'il est probable d'occuper. Ce résultat découle directement de l'absence de limite à la vitesse des observateurs et des objets.

5.2 Relativité restreinte d'Einstein

5.2.1 Non-invariance des équations de Maxwell

On considère les équations de Maxwell dans le vide décrivant l'évolution des champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ en l'absence de charges :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.6)$$

On cherche à déterminer l'effet de la transformée de Galilée sur ces équations. Pour simplifier, on suppose que les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en translation rectiligne uniforme à vitesse $\mathbf{v}_e = v_e \mathbf{e}_x$.

On s'intéresse à la dynamique d'une particule de charge q . On note $\mathbf{v}$ sa vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}$ et $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e$ sa vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Cette particule est soumise à l'action de la force de Lorentz, que l'on peut écrire dans $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (5.7)$$

et dans $\mathcal{R}'$:

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}') = q(\mathbf{E}' + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}'), \quad (5.8)$$

où $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B}'$ sont les champs électrique et magnétique transformés dans $\mathcal{R}'$.

La particule n'étant soumise qu'à cette force, comme les équations fondamentales de la physique sont invariantes on doit avoir l'égalité des forces de Lorentz dans les deux référentiels :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'. \quad (5.9)$$

Cette invariance entraîne la transformation des champs suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}' \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'. \quad (5.10)$$

Si on étudie l'équation de Maxwell-Thomson, on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0, \quad (5.11)$$

cette équation est bien invariante sous l'action de la transformée de Galilée.

En revanche, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial(E'_y + v_e B_z)}{\partial y'} + \frac{\partial(E'_z - v_e B_y)}{\partial z'} = \nabla' \cdot \mathbf{E}' + v_e \left(\frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{\partial B_y}{\partial z'} \right) = 0, \quad (5.12)$$

où l'on a effectué la transformation du champ électrique : $\mathbf{E} = (E'_x, E'_y + v_e B_z, E'_z - v_e B_y)$. Son écriture est différente après avoir effectué une transformée de Galilée, et aucun changement de jauge ne permet d'obtenir la même forme. L'équation de Maxwell-Gauss n'est donc pas invariante sous l'action de la transformée de Galilée.

De façon générale, les équations de Maxwell n'ont pas la même écriture dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ et aucun changement de jauge ne permet de les écrire de façon analogue, elles ne sont donc pas invariantes par transformée de Galilée. Cette observation est en contradiction avec le principe de relativité. Elle n'est en rien anormale, car la transformée de Galilée introduit une dissymétrie entre les variables de temps et d'espace, alors que les équations de Maxwell couplent ces variables. Pour que les équations de Maxwell restent invariantes par changement de référentiel il faut donc trouver une nouvelle transformation.

De plus, la théorie de Maxwell introduit une vitesse constante, invariante par changement de référentiel, qu'est la vitesse de la lumière dans le vide c . La loi de composition des vitesses ne fonctionne donc plus dans ce cadre.

EXERCICE 32. ★★★ Non-invariance de l'équation d'onde.

On cherche à aller plus loin dans la démonstration de la non-invariance des équations de Maxwell. Une conséquence importante est notamment la non-invariance de l'équation d'onde, qu'il est possible de démontrer en effectuant la transformation des champs issue de la transformée de Galilée.

1. Établir, dans $\mathcal{R}$, que l'opérateur de l'équation d'onde s'écrit :

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (5.13)$$

2. Effectuer la transformée de Galilée et montrer que, dans $\mathcal{R}'$, cet opérateur devient :

$$\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{c^2} (\mathbf{v}_e \cdot \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_e \cdot \nabla') (\mathbf{v}_e \cdot \nabla'). \quad (5.14)$$

5.2.2 Principes de relativité restreinte d'Einstein

On cherche à construire une théorie relativiste restreinte, qui intègre les équations de Maxwell. Par rapport à la relativité restreinte galiléenne, il faut dans un premier temps fixer c comme vitesse limite et trouver une transformation qui préserve l'invariance des équations de Maxwell. On pose alors les principes suivants :

1. Il existe des observateurs privilégiés : les observateurs d'inertie. Il s'agit d'observateurs qui savent, de manière absolue, sans faire référence à d'autres observateurs, que leur accélération est nulle. Il s'agit du caractère **restreint** ;
2. Tous les observateurs d'inertie sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Par conséquent, aucun observateur ne peut se déclarer au repos de manière absolu. C'est le caractère **relatif** ;
3. Aucun objet ne peut avoir une vitesse plus grande que celle de la lumière dans le vide c ; et
4. Il n'y a pas d'événements simultanés de manière absolue dans l'espace temps. Cependant, les surfaces d'événements simultanés relatives à un observateur sont toujours décrites par la géométrie euclidienne.

Les deux premiers principes sont identiques à ceux dans le cas galiléen, ce qui fait des deux cadres d'étude des relativités restreintes. Le troisième point impose une limite à la vitesse qu'un observateur peut atteindre : celle-ci sera toujours inférieure ou égale à la vitesse de la lumière dans le vide c . L'une des conséquences de cette limite est la perte de simultanéité des événements de l'espace temps et la restriction des états accessibles dans ce dernier.

5.3 Structure de l'espace-temps en relativité restreinte

L'espace-temps en relativité restreinte est un espace vectoriel de dimension 4 dans lequel il n'est plus possible d'isoler la dépendance temporelle des dépendances spatiales. La description de l'évolution d'un système y est alors contrainte par l'existence d'une vitesse limite c qui décrit un cône contenant toutes les lignes d'univers pouvant d'écrire les états passés et futurs d'un événement : on parle de **cône de lumière** (voir figure 5.2).

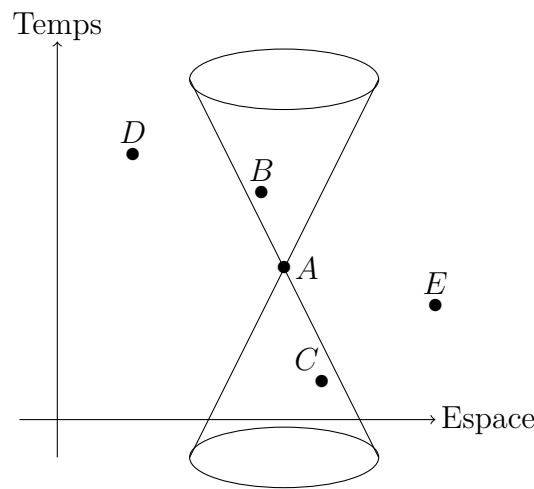


FIGURE 5.2 – Cône de lumière associé à l'événement A , défini par les droites $x = ct$. Les événements situés à l'intérieur du cône sont des événements probables : il est possible d'aller de A en B ou de C en A . Sur le cône de lumière, on trouve les événements associés à une vitesse c , donc reliés aux photons. Enfin, les événements D et E sont inaccessibles puisqu'ils sont situés en dehors du cône de lumière et nécessiteraient un trajet à une vitesse plus grande que c .

On peut ainsi distinguer différents types d'événements :

1. Les événements séparés par un intervalle d'espace-temps de type temps (*time-like*) sont à l'intérieur du cône de lumière ;
2. Les événements séparés par un intervalle d'espace-temps de type espace (*space-like*) sont à l'extérieur du cône de lumière ; et
3. Les événements de type lumière (*light-like*) sont situés sur le cône de lumière.

Le passage d'un référentiel à un autre se fait par rotation et contraction des axes du repère. Ainsi, deux événements simultanés pour un observateur ne le sont plus pour d'autres observateurs (voir figure 5.3).

REMARQUE 8. Lignes d'univers.

Les lignes d'univers des particules, des photons et des observateurs, sont intrinsèques : elles ne dépendent pas de l'observateur choisi. Un observateur est alors une manière de représenter ces lignes d'univers. La simultanéité d'événements n'est quand à elle pas intrinsèque et dépend de l'observateur considéré.

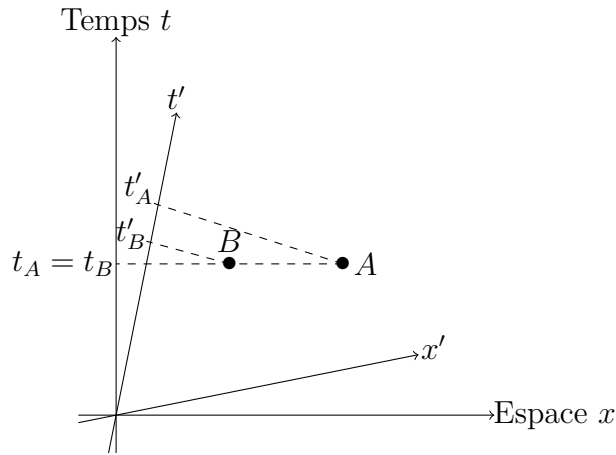


FIGURE 5.3 – Effet d'un changement de repère $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$ par transformation de Lorentz. Dans le repère $\mathcal{R}$, les événements A et B sont simultanés : $t_A = t_B$. En revanche, dans le repère $\mathcal{R}'$, l'événement B apparaît antérieur à l'événement A : $t'_B < t'_A$.

De même, le temps Δt et la distance Δx séparant deux événements dépendent de l'observateur considéré, et leur calcul n'est plus aussi direct. On considère deux événements A et B de l'espace-temps et un observateur d'inertie $\mathcal{O}$ passant par A . On envisage la situation suivante : $\mathcal{O}$ émet un photon depuis C en direction de B , lequel répond après sa réception en émettant un photon perçu par l'observateur en D (voir figure 5.4).

On note respectivement t_1 et t_2 les intervalles de temps mesurés par l'observateur $\mathcal{O}$ entre C et A et entre A et D . Les deux événements A et B sont distants de Δx et la lumière a le temps de faire un aller-retour entre les passages de $\mathcal{O}$ en C et en D , c'est-à-dire pendant un temps $t_1 + t_2$, donc :

$$\Delta x = c \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (5.15)$$

De plus, la lumière ne fait qu'un aller simple durant la durée $t_2 + \Delta t$ (ou $t_1 - \Delta t$), donc : $\Delta x = c(t_2 + \Delta t)$. On obtient alors :

$$\Delta t = \frac{t_1 - t_2}{2}. \quad (5.16)$$

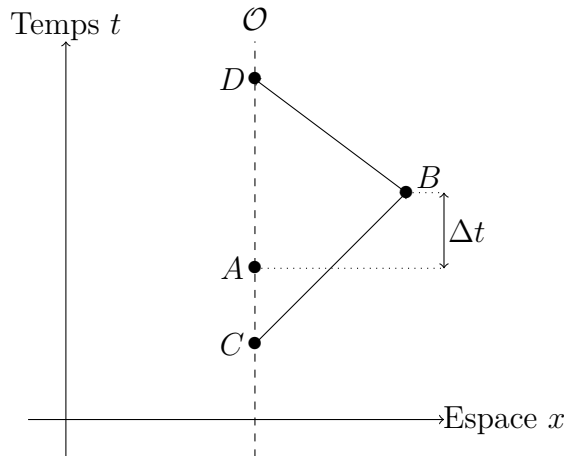


FIGURE 5.4 – Localisation des différents événements A , B , C et D et de l'intervalle de temps Δt entre A et B . Les événements C , A et D sont sur la ligne d'univers de l'observateur $\mathcal{O}$.

Transformations de Lorentz et formalisme tensoriel

On cherche à construire une théorie relativiste cohérente. Pour cela, il faut déterminer la transformation qui permet de passer d'un référentiel à un autre tout en laissant les lois de la physique fondamentale invariante, notamment les équations de Maxwell. Dans tout ce chapitre, on considèrera deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, décrits par les systèmes de coordonnées (t, x, y, z) et (t', x', y', z') , avec $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme à vitesse $v_e \mathbf{e}_x$ (pour simplifier) par rapport à $\mathcal{R}$.

6.1 Transformations de Lorentz

6.1.1 Transformations de Lorentz

La transformation de Galilée ne laisse pas invariantes les équations de Maxwell. L'une des raisons expliquant cela est le découplage des variables de temps et d'espace. On cherche donc une transformation symétrique $x'(x, t)$ et $t'(x, t)$ qui couple toutes les variables. Pour cela, on construit la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

où :

$$\beta = \frac{v_e}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.2)$$

Dans le cas des faibles vitesses ($v_e \ll c$), on obtient $\gamma \sim 1$ et $\beta \ll 1$ et, pour des petites longueurs, on retrouve la transformée de Galilée. Pour les grandes vitesses ($v_e \sim c$), on a $\beta \sim 1$ et $\gamma \rightarrow \infty$: c'est la limite ultra-relativiste.

REMARQUE 9. Limite galiléenne.

Pour un avion à basse altitude, la correction en temps est négligeable. Pour l'étude de ce système, la correction en temps est négligeable. En revanche, pour un satellite GPS ce n'est plus le cas, alors que les vitesses sont petites devant c . La limite galiléenne est obtenue lorsque les vitesses sont faibles devant c et que les distances sont petites.

Les équations de Maxwell sont invariantes par transformation de Lorentz, et, notamment, la vitesse c d'un photon est identique dans tous les référentiels d'inertie. En effet, considérons un photon se déplaçant selon l'axe (Ox) . Sa position en fonction du temps sera donnée par $x = ct$. En effectuant le changement de référentiel :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma ct(1 - \beta). \quad (6.3)$$

Or, le temps t' vérifie :

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) = \gamma ct(1 - \beta). \quad (6.4)$$

Par conséquent, $x' = ct'$ et le photon se déplace dans les deux référentiels à la vitesse c .

EXERCICE 33. ★★ Invariance des équations de Maxwell.

1. Exprimer les coordonnées (ct', x', y', z') dans le repère $\mathcal{R}'$ en fonction des coordonnées (ct, x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ après transformation de Lorentz.
2. En déduire la transformation des champs et les expressions de E_x, E_y, E_z, B_x, B_y et B_z en fonction de $E'_x, E'_y, E'_z, B'_x, B'_y, B'_z, \gamma, \beta$ et c . En quoi cette transformation des champs diffère-t-elle du cas galiléen ?
3. On suppose que l'équation de Maxwell-Faraday est invariante sous l'action de la transformation de Lorentz. Montrer alors que l'équation de Maxwell-Thomson est elle-aussi invariante et que :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0. \quad (6.5)$$

4. On suppose que l'équation de Maxwell-Ampère est invariante sous l'action de la transformation de Lorentz. Montrer que, dans ce cas, l'équation de Maxwell-Gauss est invariante et que :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla' \cdot \mathbf{E}' = 0. \quad (6.6)$$

6.1.2 Contraction des longueurs et dilatation des durées

On considère deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ associés à des observateurs d'inertie $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$. On cherche à déterminer l'effet de la transformée de Lorentz sur les axes, c'est-à-dire sur les unités de longueur et de temps.

Contraction des longueurs

Soit une règle étalon R , de longueur 1 mètre, au repos pour $\mathcal{O}$. À $t = 0$ l'une des extrémités de la règle est située à l'origine du repère O , l'autre en un point A tel que $x_A = 1$. Les deux lignes d'univers associées aux extrémités de cette règle sont l'axe des temps t et une droite passant par A parallèle à cet axe.

Soit une seconde règle étalon R' , de longueur 1 mètre, au repos pour $\mathcal{O}'$. À $t = 0$, l'une des extrémités de la règle est située en O' (confondu avec O), l'autre en un point B' tel que $x'_{B'} = 1$. On cherche dans un premier temps à déterminer la position de B' dans le repère défini pour le référentiel $\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'expression de $t_{B'}$ et $x_{B'}$ en fonction de $t'_{B'}$ et $x'_{B'}$.

D'une part, $t'_{B'} = 0$, donc :

$$t_{B'} = \frac{v_e}{c^2} x_{B'}. \quad (6.7)$$

D'autre part, $x'_{B'} = 1$, donc :

$$1 = \frac{x_{B'} - v_e t_{B'}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} = x_{B'} \frac{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} = x_{B'} \sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}. \quad (6.8)$$

On en déduit :

$$x_{B'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} \quad \text{et} \quad t_{B'} = \frac{v_e}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}}. \quad (6.9)$$

Le point B' se trouve donc sur une hyperbole d'équation $x^2 - c^2 t^2 = 1$, passant par le point A . Les deux lignes d'univers associées aux extrémités de cette règle sont l'axe des temps t' et une droite passant par B' parallèle à cet axe. La figure 6.1 montre les deux repères, les lignes d'univers et les points considérés.

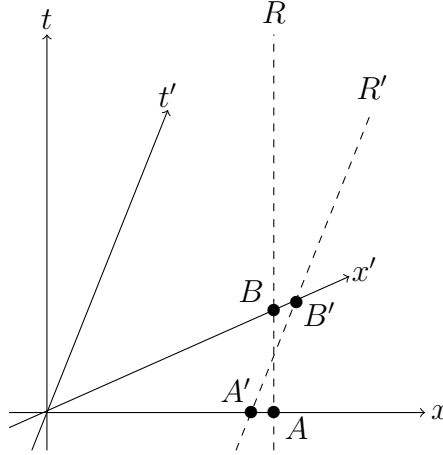


FIGURE 6.1 – Contraction des longueurs.

En se plaçant à temps fixé il est possible de mesurer les longueurs des règles. Alors : à $t = 0$, l'observateur $\mathcal{O}$ mesure la règle R' et trouve une longueur OA' telle que $OA' < OA$; et à $t' = 0$, l'observateur $\mathcal{O}'$ mesure la règle R et trouve une longueur OB telle que $OB < OB'$ (comme illustré sur la figure 6.1).

On en déduit donc qu'une règle au repos pour un observateur d'inertie, vue par un autre observateur d'inertie, apparaît plus courte : il y a **contraction des longueurs**.

Plus précisément : le point B est caractérisé par des positions $t'_B = 0$ et $x_B = 1$. Or :

$$ct'_B = \gamma(ct_B - \beta x_B) \quad \text{et} \quad x'_B = \gamma(x_B - \beta ct_B). \quad (6.10)$$

Comme $t'_B = 0$ et $x_B = 1$, on en déduit que :

$$ct_B = \beta x_B = \beta \quad \text{et} \quad x'_B = \gamma(1 - \beta ct_B). \quad (6.11)$$

En rassemblant ces expressions, on trouve finalement que :

$$x'_B = \frac{x_B}{\gamma}, \quad (6.12)$$

c'est-à-dire que les longueurs sont contractées avec un facteur :

$$\frac{1}{\gamma} < 1. \quad (6.13)$$

Dilatation des durées

On considère une horloge H au repos pour $\mathcal{O}$. Cette horloge marque 1 seconde dans $\mathcal{R}$ au point A défini par $t_A = 1$ et $x_A = 0$.

On s'intéresse à une horloge H' au repos pour $\mathcal{O}'$. Elle marque alors 1 seconde dans $\mathcal{R}'$ au point A' défini par $t'_{A'} = 1$ et $x'_{A'} = 0$. Un calcul similaire à celui effectué pour les longueurs montre que A' appartient à l'hyperbole d'équation $t^2 - x^2/c^2 = 1$ passant par A .

Afin d'effectuer une mesure du temps donné par H' dans le repère $\mathcal{R}$, on s'intéresse au point A'' défini par $t'_{A''} = 1$ et $x_{A''} = 0$. Par transformation de Lorentz, on a :

$$x'_{A''} = \gamma(x_{A''} - \beta ct_{A''}) \quad \text{et} \quad ct'_{A''} = \gamma(ct_{A''} - \beta x_{A''}). \quad (6.14)$$

Comme $x_{A''} = 0$ et $t'_{A''} = 1$, on en déduit :

$$x'_{A''} = -\gamma\beta ct_{A''} \quad \text{et} \quad ct'_{A''} = \gamma ct_{A''} = c? \quad (6.15)$$

On obtient donc, finalement :

$$t'_{A''} = \gamma t_{A''}, \quad (6.16)$$

c'est-à-dire que les durées sont dilatées d'un facteur :

$$\gamma > 1. \quad (6.17)$$

Ainsi, une horloge au repos par rapport à un observateur d'inertie, vue par un autre observateur d'inertie, donne un temps plus long : c'est la dilatation du temps.

6.1.3 Invariant relativiste

On a vu précédemment comment calculer la distance temporelle et spatiale entre deux événements A et B , en obtenant les relations :

$$\Delta t = \frac{t_1 - t_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta x = c \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (6.18)$$

On définit alors l'**intervalle d'espace-temps** entre deux événements A et B , que l'on note Δs , comme :

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2. \quad (6.19)$$

Cet intervalle est directement relié aux temps t_1 et t_2 par la relation : $-t_1 t_2 = (\Delta s)^2$. Il permet de caractériser les événements accessibles à partir d'un état donné :

1. Si $(\Delta s)^2 = 0$: on a alors $c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x)^2$ et les événements A et B sont situés sur le cône de lumière. Il s'agit d'un intervalle de type lumière ;
2. Si $(\Delta s)^2 > 0$: dans ce cas $c^2(\Delta t)^2 > (\Delta x)^2$ et l'événement B est à l'intérieur (strictement) du cône de lumière issu de A . Il s'agit d'un intervalle de type temps caractérisant les états accessibles ; et
3. Si $(\Delta s)^2 < 0$: cette fois, $c^2(\Delta t)^2 < (\Delta x)^2$ et l'événement B est à l'extérieur (strictement) du cône de lumière issu de A . Il s'agit d'un intervalle de type espace caractérisant les états inaccessibles.

L'intervalle d'espace-temps est un invariant relativiste, ce qui signifie qu'il est inchangé par transformation de Lorentz. Par conséquent, le cône de lumière (ainsi que l'accessibilité des états) est lui aussi un invariant relativiste.

EXERCICE 34. ★ Invariance de l'intervalle d'espace-temps.

En effectuant la transformation de Lorentz sur les coordonnées, montrer que l'intervalle d'espace-temps pris dans le repère $\mathcal{R}$ est le même que celui pris dans le repère $\mathcal{R}'$:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \quad (6.20)$$

6.1.4 Temps propre et repère propre instantanés

En relativité restreinte, la durée d'un phénomène dépend de l'observateur d'inertie qui effectue la mesure : c'est une grandeur relative. On cherche donc naturellement à construire une grandeur temporelle qui soit un invariant relativiste. On a vu que l'intervalle $(ds)^2$ est un invariant relativiste, homogène à une longueur, ce qui permet de définir le temps propre τ , invariant relativiste, comme :

$$d\tau^2 = \frac{(ds)^2}{c^2}. \quad (6.21)$$

Cet invariant peut aussi s'écrire comme :

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} \quad \text{avec} \quad \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2(t)}{c^2}}}, \quad (6.22)$$

en se plaçant dans le référentiel d'un observateur $\mathcal{O}$. Pour un observateur $\mathcal{O}'$, la transformation de Lorentz donne :

$$d\tau = \frac{dt'}{\gamma(t')}. \quad (6.23)$$

Il est possible de définir, à tout instant t , un repère propre instantané $\mathcal{R}_t$ lié à la particule, qui se déduit du repère de l'observateur $\mathcal{O}$ par une transformation de Lorentz. L'origine de ce repère correspond à la position de la particule à l'instant t , ses axes sont non-déterminés, et il s'agit en tout temps d'un repère d'inertie. L'avantage de ce repère est que la vitesse de la particule y est nulle ($\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$) donc si t^* est le temps dans $\mathcal{R}_t$, on a :

$$d\tau = dt^*, \quad (6.24)$$

$d\tau$ coïncide donc avec dt^* . Ainsi, le temps propre $(d\tau)^2$ est un invariant relativiste qui correspond au temps mesuré dans le référentiel propre de la particule par l'horloge liée à la particule.

6.2 Quadrivecteurs et tenseurs

Cette section a pour but d'introduire le formalisme approprié à la mécanique relativiste. Par souci de temps, la plupart des résultats seront admis et on se concentrera davantage sur la manipulation des objets que sur leurs fondements mathématiques.

6.2.1 Vecteurs de l'espace-temps

Dans le cadre d'étude galiléen, les grandeurs spatiales et temporelle étaient découplées. Fondamentalement, tout événement de l'espace temps pouvait être décrit comme une coordonnée t appartenant à l'espace des temps et un vecteur $\mathbf{x}$ appartenant à l'espace des positions. Cette distinction ne permet pas de décrire la structure de l'espace-temps en relativité restreinte d'Einstein, puisque le temps et l'espace sont liés à travers la transformée de Lorentz. On doit donc considérer des vecteurs qui appartiennent directement à l'espace-temps, qui est un espace vectoriel de dimension 4. Ces vecteurs ont donc quatre coordonnées, indexées de 0 à 3, et sont nommés **quadrivecteurs**.

EXEMPLE 16. Quadrivecteur position.

Il apparaît naturellement dans l'écriture matricielle de la transformée de Lorentz et permet de décrire la position spatio-temporelle d'un événement :

$$X = X^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

REMARQUE 10. Gestion des indices.

On écrira les indices $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$ pour désigner les différentes coordonnées d'un quadrivecteur : la coordonnée de temps (indexée par 0) et les coordonnées d'espace (indexées par 1, 2 et 3). On multiplie les indices haut et bas entre eux, et on sous-entendra la sommation pour ne pas alourdir les notations (sommation d'Einstein). Par ailleurs, les équations doivent être cohérentes au niveau des indices : un indice libre dans un membre d'une équation signifie qu'il y a aussi un indice libre dans les autres membres de l'équation.

6.2.2 Tenseurs

On note E l'espace des quadrivecteurs. E^* désigne alors l'espace vectoriel des formes linéaires sur E , aussi appelé espace dual de E . Ces formes linéaires peuvent être décomposées sur une base $(\tilde{e}^\mu)$, appelée base duale de (e_μ) , définie par :

$$\tilde{e}^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (6.26)$$

On aura notamment, pour tout quadrivecteur X :

$$\tilde{e}^\mu(X) = X^\mu. \quad (6.27)$$

Toute forme linéaire $\tilde{X}$ de E^* peut se décomposer comme :

$$\tilde{X} = \tilde{X}_\mu \tilde{e}^\mu. \quad (6.28)$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Un **tenseur** T d'ordre (p, q) est une application multilinéaire de $E^p \times E^{*q}$ dans $\mathbb{R}$, définie comme :

$$\begin{aligned} T : E^p \times E^{*q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, \tilde{X}) &\longmapsto T(X, \tilde{X}). \end{aligned} \quad (6.29)$$

On remarquera que le produit tensoriel, noté $\otimes$, de deux tenseurs T et S d'ordres (p, q) et (p', q') est un tenseur d'ordre $(p + p', q + q')$:

$$(T \otimes S)(e_{\mu_1} \dots e_{\mu_{p+p'}}, \tilde{e}_{\nu_1} \dots \tilde{e}_{\nu_{q+q'}}) = T(e_{\mu_1} \dots e_{\mu_p}, \tilde{e}_{\nu_1} \dots \tilde{e}_{\nu_q}) \otimes S(e_{\mu_{p+1}} \dots e_{\mu_{p+p'}}, \tilde{e}_{\nu_{q+1}} \dots \tilde{e}_{\nu_{q+q'}}). \quad (6.30)$$

De façon générale, ce produit ne commute pas.

REMARQUE 11. Tenseurs-quadrivecteurs.

Les tenseurs peuvent être vus comme une généralisation des quadrivecteurs et des formes linéaires de leur espace dual. En pratique, de la même façon que l'on peut représenter un quadrivecteur aux coordonnées contravariantes par un vecteur colonne de $\mathbb{R}^4$, on pourra représenter un tenseur d'ordre $(2, 0)$ comme une matrice carrée, bien que ce ne soient pas les mêmes objets.

6.2.3 Métrique de Minkowski

Métrique et coordonnées

On définit la métrique g comme le tenseur d'ordre $(2, 0)$ associé aux vecteurs de base du repère. Ainsi, la matrice associée s'écrit :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

et a pour éléments les $g_{\mu\nu}$ tels que, par définition :

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu. \quad (6.32)$$

Contrairement au produit scalaire euclidien usuel, le produit scalaire associé à la métrique g n'est pas défini positif. Formellement, g est une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

La détermination des coordonnées d'un quadrivecteur peut se faire de deux façons différentes : les coordonnées contravariantes X^μ (projection parallèle aux axes de la base) et les coordonnées covariantes X_μ (projection orthogonale aux axes de la base). Dans le cas galiléen, les coordonnées covariantes et contravariantes coïncident, mais ce n'est pas vrai dans le cas général. Le passage d'un système de coordonnées à un autre se fait grâce à la métrique g :

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu. \quad (6.33)$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, cette relation signifie que l'on a simplement :

$$X_0 = X^0 \quad \text{et} \quad X_i = -X^i. \quad (6.34)$$

REMARQUE 12. Convention sur la métrique.

On trouvera parfois une écriture différente de la métrique g en relativité restreinte, comme celle où les signes sont inversés ($-g$) ou celle faisant apparaître un i pour la composante temporelle. Si le changement de signe en g ou $-g$ n'est qu'une convention, l'écriture complexe est quant à elle une erreur.

Changement de repère

On considère un quadrivecteur X dont les coordonnées contravariantes X^μ et covariantes X_μ sont données dans un repère $\mathcal{R}$. On notera X'^μ et X'_μ ces mêmes coordonnées prises dans le repère $\mathcal{R}'$. Le changement de base entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ s'effectue par l'intermédiaire d'un tenseur :

$$X'^\nu = \Lambda^\nu_\mu X^\mu \quad \text{et} \quad X'_\nu = X_\mu L^\mu_\nu. \quad (6.35)$$

Les matrices de changement de repère vérifient notamment :

$$L^\mu_\nu \Lambda^\nu_\sigma = \delta^\mu_\sigma. \quad (6.36)$$

Le changement de base s'applique également aux tenseurs (ce ne sont pas des invariants relativistes). Soit un tenseur T dont les coordonnées sont données dans $\mathcal{R}$, le tenseur T' aux coordonnées dans $\mathcal{R}'$ obtenu après changement de base s'écrit :

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} L^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots L^{\sigma_q}_{\nu_q}. \quad (6.37)$$

Produit scalaire

On définit le produit scalaire de deux quadrivecteurs X et Y comme l'action de la métrique g sur ce couple de quadrivecteurs, c'est-à-dire :

$$\langle X, Y \rangle = g(X, Y). \quad (6.38)$$

L'application g étant bi-linéaire, on obtient :

$$g(X, Y) = g(X^\mu \mathbf{e}_\mu, Y^\nu \mathbf{e}_\nu) = X^\mu Y^\nu g(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = X^\mu Y^\nu g_{\mu\nu}, \quad (6.39)$$

et finalement :

$$\langle X, Y \rangle = X^0 Y^0 - X^i Y^i. \quad (6.40)$$

Le produit scalaire de deux quadrvecteurs est invariant par changement de coordonnées, ce qui en fait un outil particulièrement intéressant dans le cadre de la relativité restreinte :

$$\langle X, Y \rangle = \langle X', Y' \rangle. \quad (6.41)$$

Il est possible de généraliser cette notion de produit scalaire aux tenseurs. Pour deux tenseurs $F^{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$, on aura par exemple :

$$\langle F, T \rangle = F^{\mu\nu} T_{\mu\nu}. \quad (6.42)$$

EXERCICE 35. ★ Propriétés du produit scalaire.

Établir que, pour des quadrvecteurs X , Y et Z et des scalaires a et b , on a :

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle \quad (6.43)$$

$$\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle \quad (6.44)$$

$$\langle aX, bY \rangle = ab \langle X, Y \rangle. \quad (6.45)$$

EXERCICE 36. ★ Produits scalaires et invariants relativistes.

1. Montrer que le produit scalaire de deux quadrvecteurs est un invariant relativiste, c'est-à-dire qu'il est invariant par changement de repère :

$$\langle X, Y \rangle = \langle X', Y' \rangle. \quad (6.46)$$

2. En déduire que la norme d'un quadrvecteur est un invariant relativiste.
3. De même, montrer que le produit scalaire de deux tenseurs est un invariant relativiste.

Dérivation

En considérant les coordonnées contravariantes et covariantes, il est possible de définir les dérivées contravariantes et covariantes associées :

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial X_\mu} \quad \text{et} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu}. \quad (6.47)$$

EXERCICE 37. ★ Dérivée covariante ou contravariante ?

Il peut sembler étrange que la dérivée covariante (respectivement contravariante) soit la dérivée par rapport aux coordonnées contravariantes (respectivement covariantes) et non l'inverse. En partant du produit scalaire $A \cdot X$, montrer que la dérivée par rapport aux coordonnées covariantes donne bien des coordonnées contravariantes, et inversement.

EXERCICE 38. ★ Changement de variables et dérivées.

Montrer que, sous changement de coordonnées, on a :

$$\partial'_\mu = \partial_\nu L^\nu_\mu \quad \text{et} \quad \partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu. \quad (6.48)$$

6.2.4 Quadrvecteur vitesse

On a déterminé précédemment le quadrvecteur position : $(X^\mu) = (ct, \mathbf{x})$.

On définit alors le quadrvecteur vitesse comme :

$$(U^\mu) = \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \right), \quad (6.49)$$

où τ est le temps propre. On en déduit immédiatement que : $(U^\mu) = (\gamma c, \gamma \dot{\mathbf{x}})$. Par ailleurs, la norme du quadrivecteur vitesse est donnée par :

$$U^\mu U_\mu = (U_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (U_i)^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2 c^2 \frac{1}{\gamma^2} = c^2, \quad (6.50)$$

il s'agit d'un invariant relativiste. On en déduit donc que, dans le référentiel propre instantané d'une particule, on a : $(U^{*\mu}) = (c, \mathbf{0})$, car la vitesse de la particule est nulle.

On considère à présent deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ tels que $\mathcal{O}'$ soit en translation rectiligne uniforme à vitesse $v_e \mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{O}$. Dans le repère $\mathcal{R}$ associé à $\mathcal{O}$, il est possible de décomposer la vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule selon ses composantes parallèle et orthogonale à $\mathbf{v}_e$: $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_{\perp}$. On cherche à déterminer l'expression de la vitesse $\mathbf{v}'$ dans $\mathcal{R}'$ lié à $\mathcal{O}'$. On notera, par souci de clarté :

$$\beta_e = \frac{v_e}{c}, \quad \beta_v = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \beta_{v'} = \frac{v'}{c}. \quad (6.51)$$

La loi de transformation des vitesses peut être déduite de la transformée de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{v'} c \\ \gamma_{v'} v'_{\parallel} \\ \gamma_{v'} \mathbf{v}'_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v v_{\parallel} \\ \gamma_v \mathbf{v}_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

On en déduit donc que, dans $\mathcal{R}'$:

$$\gamma_{v'} = \gamma_e \gamma_v \left(1 - \frac{v_e v_{\parallel}}{c^2}\right). \quad (6.53)$$

En remplaçant alors $\gamma_{v'}$ par cette expression, on obtient :

$$v'_{\parallel} = \frac{v_{\parallel} - v_e}{1 - \frac{v_e v_{\parallel}}{c^2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}{\left(1 - \frac{v_e v_{\parallel}}{c^2}\right)} \mathbf{v}_{\perp}. \quad (6.54)$$

Les lois de composition des vitesses sont différentes de celles obtenues en relativité galiléenne, ce qui est cohérent avec l'existence d'une vitesse maximale c . Cependant, on observe que dans le cas où $v_e \ll c$ et $v_{\parallel} \ll c$, on retrouve les lois de compositions issues de la relativité galiléenne.

EXERCICE 39. ★ Non-dépassement de la vitesse de la lumière.

En remarquant que la condition $v \leq c$ peut se traduire par $\mathbf{v}_{\parallel}^2 + \mathbf{v}_{\perp}^2 \leq c^2$, montrer qu'après transformation de Lorentz on a toujours $v' \leq c$.

EXERCICE 40. ★ Composition des vitesses : approche directe.

Appliquer la transformée de Lorentz directement au vecteur position, et calculer les dérivées des différentes coordonnées par rapport au temps t . En déduire la loi de composition des vitesses.

EXERCICE 41. ★★★ Effet Doppler relativiste.

On se propose d'introduire des notions d'électromagnétisme dans le formalisme tensoriel. Afin d'étudier le comportement d'un photon, il est nécessaire de considérer le quadrivecteur permettant sa description du point de vue relativiste. On définit le quadrivecteur énergie impulsion K comme :

$$K = K^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

où ω est la fréquence du photon, et k_x , k_y et k_z les composantes de son vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

1. Justifier que la phase $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ est un invariant relativiste.
2. En utilisant la loi de dispersion d'un photon, montrer que la norme $K^\mu K_\mu$ du quadrivecteur énergie-impulsion associé est nulle.
On suppose qu'une source S , fixe par rapport à un observateur $\mathcal{O}$, émet une onde électromagnétique. Un second observateur $\mathcal{O}'$, en translation rectiligne uniforme à vitesse $v_e \mathbf{e}_x$ par rapport à $\mathcal{O}$, voit ce photon.
3. En écrivant $\mathbf{k} = k_{\parallel} \mathbf{e}_x + \mathbf{k}_{\perp}$ (et $\mathbf{k}' = k'_{\parallel} \mathbf{e}_x + \mathbf{k}'_{\perp}$), écrire la transformée de Lorentz du quadrivecteur énergie-impulsion du repère $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}'$.
4. On note θ (respectivement θ') l'angle mesuré, dans le repère $\mathcal{R}$ lié à $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{R}'$ lié à $\mathcal{O}'$), entre $\mathbf{v}_e$ et $\mathbf{k}$ (respectivement $\mathbf{k}'$). Montrer que l'effet Doppler relativiste est donné par :

$$\omega' = \gamma_e \omega (1 - \beta_e \cos \theta) \quad \text{et} \quad \omega = \gamma_e \omega' (1 + \beta_e \cos \theta'). \quad (6.56)$$

5. En déduire que :

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_e \cos \theta - \beta_e}. \quad (6.57)$$

On considère le cas où le photon est émis selon l'axe de translation de $\mathcal{O}'$ par rapport à $\mathcal{O}$, c'est-à-dire : $\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}'_{\perp} = \mathbf{0}$.

6. Que valent les angles θ et θ' ?
7. Montrer que si $\mathcal{O}'$ s'approche de la source on a :

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}} > \omega. \quad (6.58)$$

8. Montrer que, dans la limite galiléenne, on retrouve l'effet Doppler classique :

$$\omega' \simeq (1 + \beta_e) \omega. \quad (6.59)$$

On considère maintenant le cas où $\mathbf{k}'_{\perp} \perp \mathbf{v}_e$, donc $\theta' = \pi/2$.

9. Établir qu'on a alors :

$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma_e} = \omega \sqrt{1 - \beta_e^2}. \quad (6.60)$$

10. Justifier que $\omega' < \omega$. A-t-on ce résultat en relativité galiléenne ?

Les deux chapitres précédents nous ont permis d'introduire la relativité restreinte d'Einstein, ainsi que sa formulation tensorielle, dans un cadre cinématique. L'objectif de ce dernier chapitre est de poursuivre le développement de la théorie relativiste dans un cadre dynamique, c'est-à-dire une étude où les systèmes ne sont plus nécessairement au repos.

7.1 Action de la particule libre relativiste

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel d'inertie. On considère une particule massive, de masse m , qui n'est soumise à aucune force. Le chemin X de cette particule dans l'espace-temps est paramétré par $\sigma \in [a; b]$, avec a et b deux réels : $X(\sigma)$. L'abscisse curviligne de ce chemin s'écrit alors :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (7.1)$$

c'est-à-dire :

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} d\sigma. \quad (7.2)$$

L'action de la particule libre relativiste est alors donnée par l'intégrale de ce chemin :

$$\mathcal{S}[X] = -mc \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} d\sigma, \quad (7.3)$$

définissant ainsi un lagrangien :

$$\mathcal{L}(X, \dot{X}, \sigma) = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} = -mc \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX_\mu}{d\sigma}}, \quad (7.4)$$

en notant la $\dot{X}$ la dérivée du quadrivecteur position par le paramètre σ .

On s'intéresse à présent aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} = 0. \quad (7.5)$$

La dérivée du lagrangien par rapport au vecteur position est nulle, mais le premier terme permet d'obtenir l'égalité caractérisant le mouvement de la particule libre :

$$m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (7.6)$$

7.2 Quadrivecteur énergie-impulsion

Le système est invariant par translation d'espace-temps, c'est à dire que $\delta X^\mu = \alpha^\mu$ est une symétrie infinitésimale, où α^0 correspond à la translation temporelle (à un facteur c près) et α à la translation spatiale. Le théorème de Noether donne alors la quantité conservée :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)} = -m \frac{dX_\mu}{d\tau} = mU_\mu. \quad (7.7)$$

Or, en relativité galiléenne, les invariances par translations temporelles et spatiales sont associées à une conservation de l'impulsion et de l'énergie. Ce résultat doit être vérifié dans la limite galiléenne. On pose alors le **quadrivecteur énergie-impulsion** P comme la charge conservée par invariance par translation d'espace-temps, au signe près :

$$P = P^\mu \mathbf{e}_\mu = m \frac{dX^\mu}{d\tau} \mathbf{e}_\mu = mU^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (7.8)$$

Dans le cas de la particule libre, cette charge est bien conservée car on retrouve son équation dynamique :

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (7.9)$$

L'invariance par translation spatiale est associée à la conservation de l'impulsion : c'est cohérent, puisque par définition les coordonnées P^i sont liées à la dérivée de la vitesse de la particule considérée.

L'invariance par translation temporelle est, quant à elle, associée à la conservation de l'énergie. On en déduit donc que l'énergie E d'une particule relativiste est donnée par :

$$E = P^0 c. \quad (7.10)$$

Comme :

$$P^\mu \mathbf{e}_\mu = mU^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

on a finalement :

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.12)$$

Une particule au repos ($\mathbf{v} = 0$) a donc une énergie non nulle, appelée *énergie de masse* E_m :

$$E_m = mc^2. \quad (7.13)$$

Il s'agit du principe d'équivalence masse-énergie.

On définit l'*énergie cinétique* T de la particule comme l'énergie associée à son mouvement, c'est à dire :

$$T = E - E_m = (\gamma - 1)mc^2. \quad (7.14)$$

On remarque notamment que dans la limite galiléenne on retrouve $T = mv^2/2$.

Les produits scalaires sont des invariants relativistes : la norme du quadrivecteur énergie-impulsion est donc une quantité conservée. Si on se place dans le repère propre de la particule, $\mathbf{v} = 0$ et :

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^2. \quad (7.15)$$

D'autre part, comme $E = P^0 c$, on a :

$$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2. \quad (7.16)$$

On en déduit donc :

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2, \quad (7.17)$$

et :

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}. \quad (7.18)$$

REMARQUE 13. Particules et antiparticules.

L'expression trouvée pour l'énergie E^2 introduit une symétrie entre les énergies positives et négatives, qui n'existait pas en mécanique galiléenne. Cela signifie qu'il peut exister des particules de masses négatives, les antiparticules.

REMARQUE 14. Cas du photon.

Pour le photon, on envisage de poser $E = \hbar \nu$ et $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \hbar \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$, où $\mathbf{n}$ est la direction de propagation du photon. Dans ce cas :

$$P = \frac{\hbar \omega}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Par conséquent, $P^\mu P_\mu = 0$: cohérent, puisque la norme du quadrivecteur énergie-impulsion est un invariant relativiste valant mc^2 et que le photon est de masse nulle. L'énergie du photon vaut alors $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2$. Or on a $E = \gamma mc^2$ et $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, donc finalement $|\mathbf{v}| = c$. La vitesse d'une particule de masse nulle ne peut être que c .

EXERCICE 42. ★ Énergie de repos et fission nucléaire.

Les noyaux des atomes peuvent être vus comme des agrégats de protons et de neutrons, qu'il est possible de séparer : c'est le principe de la fission nucléaire. On cherche à montrer que cette fission nucléaire permet de libérer de l'énergie. On rappelle la définition de l'électron-volt : $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ V}$.

1. En utilisant l'équivalence masse-énergie, calculer la masse au repos d'un électron et d'un proton, sachant que la masse d'un électron est $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et que celle d'un proton est $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. On l'exprimera en MeV/c^2 .
2. Calculer la différence entre la masse de l'atome d'hydrogène et les masses de ses différents constituants et montrer qu'il existe un défaut de masse non-nul $\Delta M = M_p + M_e - M(H)$.
3. Calculer de même, pour le deutéron : $\Delta M = M_p + M_n + M_e - M(D)$. Quelle est la différence dans les forces en jeu ?
4. On définit l'énergie de liaison comme :

$$W(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - M({}_Z^A X). \quad (7.20)$$

Calculer cette énergie pour l'uranium 235 et pour les premiers éléments de sa chaîne de réaction nucléaire. Justifier que la réaction de fission, pour des éléments lourds, est exothermique. Est-ce le cas pour tous les éléments ?

7.3 Formulation relativiste de l'équation de la dynamique

À partir de l'action d'une particule relativiste libre, on a pu écrire l'équation de la dynamique issue des équations d'Euler-Lagrange :

$$m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (7.21)$$

En mécanique galiléenne, les équations d'Euler-Lagrange redonnent les équations du principe fondamental de la dynamique. On construit alors un PFD relativiste en posant :

$$m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = F^\mu, \quad (7.22)$$

où F^μ est le quadrivecteur force, que nous n'étudierons pas plus en détail dans ce cours.