
Mécanique analytique et relativité restreinte

Exercices

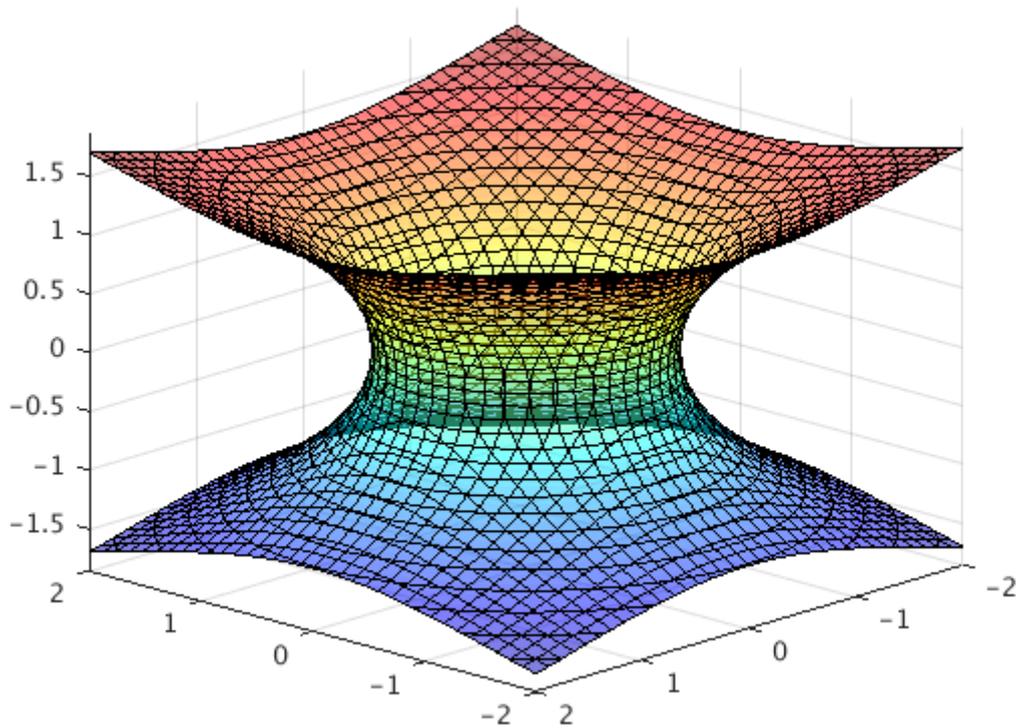


Table des matières

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Principes variationnels | 7 |
| 2 | Mécanique lagrangienne | 13 |
| 3 | Mécanique hamiltonienne | 19 |
| 4 | Symétries et théorème de Noether | 21 |
| 5 | Relativité restreinte | 23 |
| 6 | Transformations de Lorentz et formalisme tensoriel | 25 |
| 7 | Dynamique relativiste | 29 |

Ce fascicule d'exercices est à destination des élèves en préparation à l'agrégation de physique à l'ENS de Lyon. Il est à associer au cours donné en classe. La majorité des exercices proviennent d'ouvrages de mécanique analytique ou de relativité restreinte, de sujets posés aux écrits de l'agrégation, ou en sont inspirés. Pour la partie mécanique analytique, la plupart avaient déjà été proposés par Sylvain Lacroix dans son cours.

Ce document suit le plan du cours et est divisé en sept chapitres. Les quatre premiers abordent des notions de mécanique analytique : principes variationnels, mécanique lagrangienne, mécanique hamiltonienne, et l'étude des symétries et du théorème de Noether. Les trois derniers sont une introduction à la théorie de la relativité restreinte d'Einstein.

Pour guider votre réflexion, vous pouvez consulter les références suivantes, qui ont servi à la préparation du cours :

- **J. José, E. Saletan**, *Classical Dynamics : a Contemporary Approach*, Cambridge University Press, 1998 ;
- **L. Landau, E. Lifchitz**, *Physique théorique – Mécanique*, Ellipses, 1998 ;
- **H. Goldstein**, *Classical Mechanics*, Adisson-Wesley, 1980 ;
- **R. Feynman, R. Leighton, M. Sands**, *Mécanique 1 (ré-édition)*, Dunod, 2018 ;
- **A. Einstein**, *La théorie de la relativité restreinte et générale*, Dunod, 2012 ;
- **J. Hladik**, *Introduction à la relativité restreinte*, Ellipses, 2006 ;
- **W. Appel**, *Mathématiques pour la physique et les physiciens !*, H&K, 2008.

Ce document étant récent, il est susceptible de comporter des erreurs. Si vous repérez une coquille, une imprécision, ou une faute, merci de me le signaler en m'envoyant un mail à samuel.boury@ens-lyon.fr. Je reste à votre disposition si vous avez la moindre question.

EXERCICE 1. ★ Plus court chemin dans \mathbb{R}^n .

Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé les équations d'Euler-Lagrange pour montrer que le plus court chemin entre deux points du plan euclidien \mathbb{R}^2 est la ligne droite. Le fait de se placer en dimension 2 avait permis de simplifier le problème en paramétrant une des coordonnées par l'autre. L'objectif de cet exercice est de généraliser le résultat à l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

1. Montrer que le problème du plus court chemin dans \mathbb{R}^n se réduit à la minimisation de la fonctionnelle :

$$\mathcal{D}[q] = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\dot{q}_i(t))^2 \right)^{1/2} dt. \quad (1.1)$$

2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées et en déduire que :

$$\dot{q}_i = c_i \sqrt{\sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2}, \quad (1.2)$$

où c_i est une constante indépendante de t .

3. En déduire que la courbe $t \mapsto q(t)$ donnant le plus court chemin dans \mathbb{R}^n est une droite de vecteur directeur (c_1, \dots, c_n) .

EXERCICE 2. ★ Bulle de savon entre deux anneaux coaxiaux (sujet C 2016, question 12).

On considère deux anneaux coaxiaux de rayon R , situés dans les plans $z = h$ et $z = -h$ de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , paramétrisé par les coordonnées (x, y, z) . On les plonge dans l'eau savonneuse et on les en retire. Une bulle de savon se crée entre les deux anneaux : le but de cet exercice est d'en déterminer la forme. Le système est représenté figure 1.1.

Le problème étant invariant par rotation autour de l'axe vertical, la position de la bulle à une hauteur z ne dépend que de la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ à l'axe. On cherche à déterminer l'équation de la courbe $r(z)$ donnant le rayon de la bulle à la hauteur z .

1. Justifier que la position d'équilibre de la bulle de savon est celle minimisant sa surface \mathcal{A} .
2. Démontrer que l'aire de la bulle s'exprime comme :

$$\mathcal{A} = \int_{-h}^h 2\pi r(z) \sqrt{1 + \dot{r}^2(z)} dz, \quad (1.3)$$

avec $\dot{r} = \frac{dr}{dz}$.

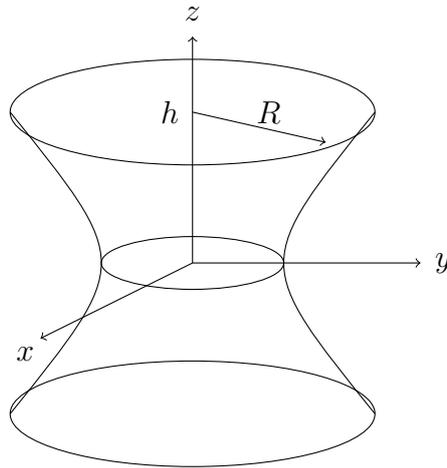


FIGURE 1.1 – Deux anneaux rigides coaxiaux, en $z = h$ et $z = -h$, reliés par un film de savon.

3. Exprimer alors le problème comme une minimisation fonctionnelle et identifier les paramètres, coordonnées et vitesses généralisées, action et lagrangien du système.
4. Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange associée s'écrit :

$$1 + \dot{r}^2 = r\ddot{r}. \quad (1.4)$$

5. Vérifier alors que l'équation de la bulle est donnée par une caténoïde :

$$r(z) = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right), \quad (1.5)$$

où a est une constante telle que $R = a \cosh\left(\frac{h}{a}\right)$.

EXERCICE 3. ★★ Courbe brachistochrone.

On considère une courbe plane \mathcal{C} dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 , reliant l'origine $O(0, 0)$ à un point $A(x_0, y_0)$ fixé. On paramétrisera cette courbe en exprimant l'ordonnée y comme une fonction de l'abscisse x . On s'intéresse à un point matériel M , repéré par ses coordonnées (x, y) , posé sans vitesse initiale au point O à l'instant $t = 0$. Ce point matériel est soumis à l'action de la gravité et glisse sans frottement sur la courbe \mathcal{C} . L'objectif de cet exercice est de déterminer la forme de \mathcal{C} optimisant le temps de chute du point matériel depuis l'origine O jusqu'au point A . Le problème est représenté figure 1.2.

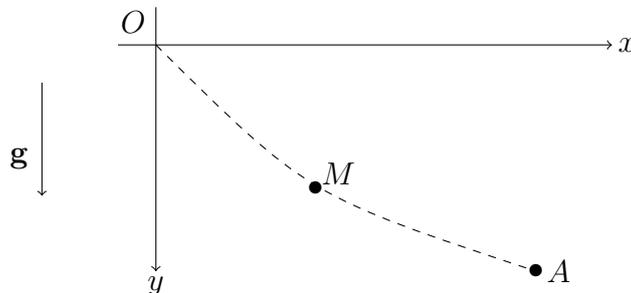


FIGURE 1.2 – Problème du brachistochrone.

1. Soit s l'abscisse curviligne le long de la courbe \mathcal{C} , définie par $ds^2 = dx^2 + dy^2$. En utilisant un argument énergétique, justifier que la vitesse du point $v = \frac{ds}{dt}$ à l'ordonnée y est égale à $\sqrt{2gy}$.

2. En déduire que le temps mis par le point matériel pour parcourir la courbe \mathcal{C} est donné par :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} dx, \quad (1.6)$$

où l'on a défini $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$.

3. Faire l'analogie entre ce problème et un problème variationnel en identifiant le paramètre, les coordonnées et vitesses généralisées, l'action et le lagrangien du système.
4. En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, montrer que la fonction y vérifie :

$$1 + \dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0. \quad (1.7)$$

5. Vérifier que la quantité :

$$Q = y(1 + \dot{y}^2), \quad (1.8)$$

est une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire que $\dot{Q} = 0$.

6. On reparamétrise y par : $y = \frac{Q}{2} (1 - \cos \theta)$. Démontrer que :

$$x(\theta) = \frac{Q}{2} (1 - \sin \theta). \quad (1.9)$$

L'équation de la courbe (x, y) en fonction de θ ainsi obtenue est celle d'une cycloïde.

EXERCICE 4. ★★★★★ Chemin le plus court dans un espace courbé.

Nous avons vu précédemment comment utiliser un problème variationnel afin de prouver que la ligne droite est le plus court chemin dans un espace euclidien. Pour y parvenir, nous avons écrit la distance entre deux points sous la forme d'une intégrale de l'élément de distance euclidien infinitésimal : $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^n dq_i^2}$.

Ce calcul correspond au cas du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Une première généralisation possible est de considérer un produit scalaire quelconque, $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i v_j$, avec g symétrique en les indices i et j . L'élément de distance infinitésimal sera alors : $ds = \sqrt{\langle q, q \rangle}$.

Une généralisation plus complexe est de considérer un espace **courbé**. Ce principe, à la base de la géométrie Riemannienne, consiste à considérer un espace, paramétrisé par des coordonnées x^μ , muni d'une notion de distance infinitésimale dépendant localement du point considéré :

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}, \quad (1.10)$$

où l'on sous-entend une sommation sur les indices répétés μ et ν . Le champ $g_{\mu\nu}(x)$, symétrique par échange de μ et ν , qui décrit le produit scalaire au point x , est appelé la **métrie** de l'espace.

Les courbes de longueur minimale d'un espace courbé sont appelées des **géodésiques**. Déterminer ces courbes est donc équivalent à minimiser la fonctionnelle :

$$\mathcal{D}[x] = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu(t) \dot{x}^\nu(t)} dt. \quad (1.11)$$

Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées, puis effectuer le changement de paramètre $t \rightarrow s$, l'abscisse curviligne s est définie par l'équation (1.10). Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0, \quad (1.12)$$

avec les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} \right), \quad (1.13)$$

où $g^{\mu\nu}$ désigne l'inverse de $g_{\mu\nu}$, c'est-à-dire : $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$.

Cette équation, appelée **équation aux géodésiques**, est l'équation fondamentale de la dynamique en théorie de la relativité générale, et découle ainsi d'un principe variationnel.

EXERCICE 5. ★ Principe de Fermat et équation eikonale.

On considère un rayon lumineux se propageant dans un milieu optique d'indice $n(\mathbf{r})$, dépendant du point de l'espace \mathbf{r} considéré. On décrit le rayon lumineux comme une courbe $\mathbf{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de l'espace, paramétrisée par un paramètre t (qui n'est pas nécessairement le temps). Le chemin optique est alors défini comme la distance parcourue par le rayon lumineux pondérée par l'indice optique :

$$\mathcal{C}[\mathbf{r}] = \int_a^b n(\mathbf{r}(t)) \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_a^b n(\mathbf{r}(t)) \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t)} dt, \quad (1.14)$$

où $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Le **principe de Fermat** stipule que, dans l'approximation de l'optique géométrique, la trajectoire \mathbf{r} suivie par le rayon lumineux est telle que le chemin optique $\mathcal{C}[\mathbf{r}]$ soit extrémale et, le plus souvent, minimale.

1. Interpréter le principe de Fermat comme un problème variationnel. Identifier le paramètre, les coordonnées et vitesses généralisées, l'espace de configuration, l'action et le lagrangien du système.
2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Effectuer le changement de paramètre $t \mapsto s$ de t vers l'abscisse curviligne s définie par :

$$ds = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt. \quad (1.15)$$

Montrer alors que les équations d'Euler-Lagrange se réécrivent comme l'**équation eikonale** :

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.16)$$

(En optique ondulatoire, cette équation est parfois aussi appelée **équation des rayons lumineux**, le nom d'équation eikonale désignant alors une reformulation de la relation de dispersion pour l'onde électromagnétique, équivalente à l'équation des rayons lumineux.)

Cette équation relie la courbure des rayons lumineux dans un milieu optique non-homogène au gradient d'indice optique. Elle permet, par exemple, d'expliquer les phénomènes de mirage ou de propagation dans des fibres optiques à gradient d'indice.

EXERCICE 6. ★★ Lagrangien dépendant de dérivées d'ordre supérieur.

Soit $d \in \mathbb{N}$. On considère la fonctionnelle :

$$\mathcal{S}[q] = \int_a^b \mathcal{L} \left(q(t), q^{(1)}(t), \dots, q^{(d)}(t), t \right) dt, \quad (1.17)$$

où $q^{(k)} = \frac{d^k q}{dt^k}$.

On cherche à trouver l'équation que vérifie un extremum local \tilde{q} de \mathcal{S} . Pour cela, on s'inspirera de la démonstration des équations d'Euler-Lagrange et on cherchera \tilde{q} comme un point stationnaire de \mathcal{S} . On pose donc $q = \tilde{q} + \delta q$, avec $\delta q^{(k)}(t = a) = \delta q^{(k)}(t = b) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, d - 1$.

Calculer $\delta\mathcal{S} = \mathcal{S}[q] - \mathcal{S}[\tilde{q}]$ à l'ordre 1 en δq et en déduire la condition d'extrémalité $\delta\mathcal{S} = 0$ sous la forme d'équations différentielles d'ordre $2d$ sur \tilde{q}_i , généralisant les équations d'Euler-Lagrange.

EXERCICE 7. ★ Lagrangiens différant d'une dérivée totale : approche directe.

On considère deux lagrangiens :

$$\mathcal{L} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{G}}{dt}, \quad (1.18)$$

où \mathcal{G} est une grandeur. Montrer explicitement que les équations d'Euler-Lagrange pour \mathcal{L}' sont les mêmes que celles pour \mathcal{L} .

Indication : introduire l'expression explicite de la dérivée totale formelle de \mathcal{G} et utiliser son équation d'évolution pour calculer les dérivées totales apparaissant dans les équations d'Euler-Lagrange.

EXERCICE 8. ★★★ Lagrangiens différant d'une dérivée totale : réciproque.

Jusqu'à présent, on a distingué les quantités, fonctions de (q, \dot{q}, t) , de leur évaluation le long d'une solution $q^{(e)}$ des équations d'Euler-Lagrange. Ceci nous a permis de définir formellement la dérivée totale d'une grandeur \mathcal{G} comme étant :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}(q, t)\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}(q, t). \quad (1.19)$$

De même, si on considère une quantité \mathcal{G} dépendant non plus uniquement des coordonnées généralisées q et du paramètre t , mais également des vitesses généralisées \dot{q} , on peut définir formellement sa dérivée totale comme étant la fonction de $(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ suivante :

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}(q, \dot{q}, t)\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}(q, \dot{q}, t). \quad (1.20)$$

1. On considère un lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En utilisant la définition formelle de dérivée totale donnée ci-dessus, donner l'expression des fonctions \mathcal{D}_i :

$$\mathcal{D}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (1.21)$$

en termes de dérivées de \mathcal{L} . Remarquons notamment que les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\mathcal{D}_i^{(e)}(t) = \mathcal{D}_i(q^{(e)}(t), \dot{q}^{(e)}(t), \ddot{q}^{(e)}(t), t) = 0. \quad (1.22)$$

On considère maintenant un second lagrangien $\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t)$ et les fonctions $\mathcal{D}'_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ associées. On dit alors que \mathcal{L} et \mathcal{L}' donnent exactement les mêmes équations d'Euler-Lagrange si les fonctions \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont égales. Dans la suite de l'exercice on supposera que cette égalité est vérifiée et on cherchera à démontrer que \mathcal{L} et \mathcal{L}' ne diffèrent que de la dérivée totale d'une certaine quantité $\mathcal{G}(q, t)$. On pose pour cela :

$$Psi(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \mathcal{L}'(q, \dot{q}, t). \quad (1.23)$$

2. Utiliser que $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}'_i$ et la question précédente pour établir l'égalité fonctionnelle :

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2\Psi}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial^2\Psi}{\partial \dot{q}_j \partial q_j} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial q_i} = 0. \quad (1.24)$$

3. En étudiant la dépendance en \dot{q} de l'équation ci-dessus, montrer que Ψ est de la forme :

$$\Psi(q, \dot{q}, t) = \chi_i(q, t)\dot{q}_i + \phi(q, t), \quad (1.25)$$

avec χ_i et ϕ des fonctions de (q, t) telles que :

$$\dot{q}_j \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \chi_j}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial q_i} = 0. \quad (1.26)$$

4. De même, en étudiant la dépendance en \dot{q} de l'équation ci-dessus, montrer qu'il existe une quantité $\mathcal{G}(q, t)$ telle que :

$$\chi_i(q, t) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}(q, t), \quad (1.27)$$

et une fonction $\lambda(t)$ telle que :

$$\phi(q, t) = \frac{d\mathcal{G}}{dt}(q, t) + \lambda(t). \quad (1.28)$$

Indication : par le lemme de Poincaré, si un champ de vecteur $V_i(x)$ est tel que $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$ pour tout i, j , alors V_i est un gradient.

5. En déduire que Ψ est une dérivée totale.

EXERCICE 9. ★★ Covariance des équations d'Euler-Lagrange : approche directe.

En utilisant les règles de dérivation des compositions, montrer par un calcul direct la covariance des équations d'Euler-Lagrange.

Indication : l'inversibilité de la transformation $q \mapsto q'$ se traduit localement par l'inversibilité de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)_{i,j}$.

EXERCICE 10. ★ Équations d'Euler-Lagrange en coordonnées cylindriques.

On considère le lagrangien d'un point matériel soumis à un potentiel $V : \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t)$. Le but de cet exercice est d'effectuer, au niveau du lagrangien, un changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

1. Exprimer le changement de coordonnées $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ et son inverse.
2. Exprimer les vitesses généralisées \dot{x} et \dot{y} en fonction de \dot{r} et $\dot{\theta}$.
3. En déduire l'expression du lagrangien exprimé dans les coordonnées cylindriques.
4. Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées et comparer au PFD écrit en coordonnées cylindriques.

Mécanique lagrangienne

EXERCICE 11. ★★ Équations d'Euler-Lagrange en coordonnées sphériques.

On considère le même problème que dans l'exercice précédent, mais on s'intéresse cette fois à un changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Reproduire la méthode de l'exercice précédent pour écrire les équations d'Euler-Lagrange en coordonnées sphériques, et les comparer avec le PFD.

EXERCICE 12. ★★ Particule chargée dans un champ électromagnétique.

On considère une particule de masse m et de charge q , repérée par sa position \mathbf{x} , plongée dans un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . On choisit un potentiel électrique ϕ et un potentiel magnétique \mathbf{A} tels que :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.1)$$

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz.
2. Écrire le PFD pour la particule.
3. Vérifier que les équations du mouvement obtenues par le PFD sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi(\mathbf{x}, t) + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

Indication : la dérivée totale de \mathbf{A} s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (2.3)$$

et on pourra utiliser l'identité d'analyse vectorielle :

$$\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (2.4)$$

valide pour tout vecteur \mathbf{V} indépendant de \mathbf{x} .

4. Rappeler la notion de transformation de jauge des potentiels (ϕ, \mathbf{A}) . En considérant le lagrangien \mathcal{L}' correspondant à un autre choix de jauge (ϕ', \mathbf{A}') , calculer $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$. Commenter.

EXERCICE 13. ★ Oscillateur harmonique amorti.

On considère un point matériel de masse m , repéré par sa position \mathbf{x} . Ce point est soumis à une force de rappel de la forme $-k\mathbf{x}$, ainsi qu'à une force de friction de la forme $-\lambda\dot{\mathbf{x}}$.

1. Écrire le PFD pour ce point matériel.
2. Vérifier que les équations du mouvement obtenues avec le PFD sont équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange issues du lagrangien :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \exp\left(\frac{\lambda t}{m}\right) \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}k\mathbf{x}^2\right). \quad (2.5)$$

3. Effectuer le changement de variable $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{r} = \exp\left(\frac{\lambda t}{m}\right) \mathbf{x}$ au niveau du lagrangien. Commenter.

EXERCICE 14. ★ Frottement en régime turbulent.

On considère le lagrangien suivant, dépendant d'une unique coordonnée généralisée x et de sa dérivée temporelle \dot{x} :

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \exp\left(\frac{2\lambda x}{m}\right) \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - W(x)\right), \quad (2.6)$$

où W est une fonction de x , non déterminée pour le moment.

Écrire l'équation d'Euler-Lagrange associée. Interpréter cette équation comme l'équation de la dynamique d'un point matériel soumis à une force extérieure et à une force de frottement à haute vitesse (*i.e.* proportionnelle à la vitesse au carré). Quelle est la relation entre la fonction W et la force extérieure? Comparer à la notion de potentiel. Discuter le signe que λ doit avoir pour que l'équation soit physiquement vraisemblable, selon les différentes cinématiques du problème.

EXERCICE 15. ★ Pendule accroché à un ressort.

On considère une masse M astreinte à se déplacer sur un axe horizontal (Ox), repérée par son abscisse x . Cette masse est reliée à l'origine par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0 . On attache à cette masse un pendule pesant, de masse m , de longueur l (inextensible), repéré dans le plan par des coordonnées (\tilde{x}, \tilde{y}) . Le système est représenté figure 2.1.

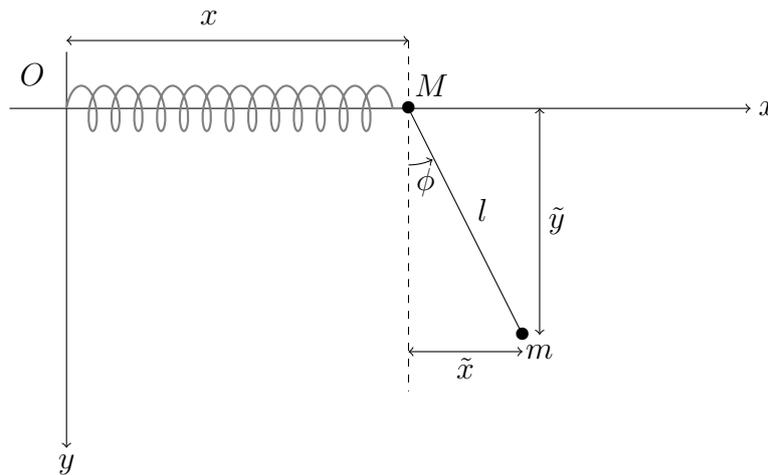


FIGURE 2.1 – Pendule dont une extrémité est attachée à un ressort.

1. On note ϕ l'angle que fait le pendule avec la verticale. Exprimer les énergies cinétiques et potentielles des deux masses en fonction de x , ϕ , et des dérivées temporelles \dot{x} et $\dot{\phi}$.
2. En déduire le lagrangien du système et écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Traiter le problème par une approche newtonienne (PFD, forces de tension, ...) et montrer que l'on retrouve les mêmes équations. Comparer les deux méthodes.

EXERCICE 16. ★ Pendule double oscillant dans le plan.

On considère un système de double pendule : un premier pendule pesant de masse m_1 et de longueur l_1 (inextensible) est attaché à l'origine du repère ; un second pendule pesant de masse m_2 et de longueur l_2 (inextensible) est accroché à l'extrémité du premier pendule. Le système est représenté figure 2.2.

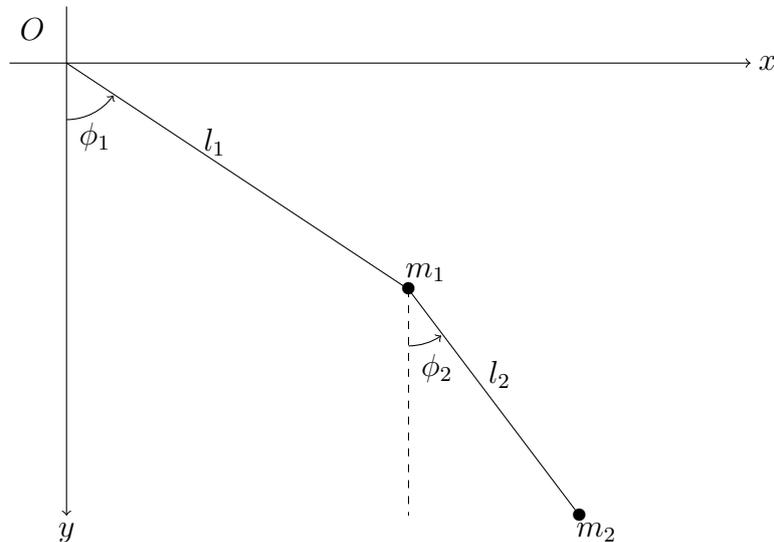


FIGURE 2.2 – Pendule double.

1. On note ϕ_1 (respectivement ϕ_2) l'angle entre le premier (respectivement le second) pendule et la verticale. Exprimer les énergies cinétiques et potentielles des deux masses en fonction de ϕ_1 , ϕ_2 , et des dérivées temporelles $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$.
2. Écrire le lagrangien du système et les équations d'Euler-Lagrange associées.
3. Traiter le problème par une approche newtonienne et montrer que l'on obtient les mêmes équations. Comparer les deux méthodes.

EXERCICE 17. ★ Roulement sans glissement

On considère une bille de rayon R roulant sans glissement sur un plan incliné. On repère par y la position du point de contact de la bille sur le plan (l'axe \mathbf{e}_y est pris parallèle au plan) et on note θ l'angle de rotation de la bille.

1. Justifier que le roulement sans glissement impose la relation :

$$\frac{dy}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.7)$$

2. Écrire cette relation sous la forme d'une contrainte holonome.

EXERCICE 18. ★ Problème isopérimétrique, version triangle

On considère un triangle de côtés a , b , c . On admettra que son aire est donnée par la formule de Héron :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}. \quad (2.8)$$

On cherche à déterminer une relation sur a , b et c permettant de maximiser l'aire du triangle à périmètre l fixé.

1. Justifier que maximiser l'aire est équivalent à maximiser $\frac{1}{4}((a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4))$.
2. Écrire la condition portant sur le périmètre sous la forme d'une contrainte holonome.

3. Écrire le lagrangien $\mathcal{L}(a, b, c; \lambda)$ associé, où l'on a introduit un multiplicateur λ .
4. Donner les équations d'Euler-Lagrange associées. Vérifier que celle portant sur λ permet de retrouver la contrainte, et que celles sur a , b et c sont symétriques par permutation cyclique des trois variables.
5. Vérifier que $a = b = c = l/3$ est solution du système (on admettra que c'est la seule). Interpréter ce résultat.

EXERCICE 19. ★ Volume vs. surface d'un cylindre

On considère un cylindre de rayon R et de hauteur H . On cherche à déterminer les dimensions R et H qui minimisent la surface S du cylindre pour un volume V donné.

1. Quelle est la quantité à minimiser ? En déduire l'expression du lagrangien en fonction des variables R et H .
2. Formuler la contrainte $g(R, H, V)$.
3. Le lagrangien dépend donc de deux variables R et H et d'un multiplicateur λ . Écrire les équations d'Euler-Lagrange associées.
4. Résoudre le système.

EXERCICE 20. ★ Corde pesante et caténoïde

On se place dans le plan (x, z) où z est la coordonnée donnée par la verticale ascendante. On considère une corde de masse linéique μ et de longueur l_0 fixée en deux points $A(0, 0)$ et $B(x_B, 0)$, avec $x_B < l$. La corde est supposée inélastique. On cherche à déterminer la forme de la corde lorsque celle-ci est au repos, c'est-à-dire uniquement soumise à son propre poids.

1. Exprimer et paramétriser l'élément de longueur dl de la corde.
2. Que vaut l'énergie potentielle dV d'un élément de corde dl ?
3. Quelle est alors la quantité à minimiser ?
4. Quelle est la contrainte à respecter ?
5. Donner le lagrangien correspondant, en introduisant un multiplicateur de Lagrange.
6. Établir l'équation d'Euler-Lagrange correspondante et la résoudre.

EXERCICE 21. ★★ Corde pesante et caténoïde (extension)

Reprendre le problème précédent en considérant que les extrémités de la corde sont fixées en deux points $A(0, 0)$ et $B(x_B, z_B)$.

EXERCICE 22. ★★★ Formulation variationnelle de l'entropie

On s'intéresse ici à donner une formulation de l'entropie par l'intermédiaire d'un principe variationnel.

1. Justifier que l'entropie peut s'exprimer sous la forme d'une fonctionnelle :

$$S = \int -k_B \rho(x) \ln[\rho(x)] dx, \quad (2.9)$$

où $\rho(x)$ est une fonction de densité que l'on interprétera.

2. Justifier que l'on a une contrainte holonome :

$$\int \rho(x) dx - 1 = 0. \quad (2.10)$$

3. Du fait de la partition en énergie et en nombre de particules, justifier que le système est soumis à deux autres contraintes holonomes :

$$\int \rho(x) E(x) dx - \bar{E} = 0, \quad (2.11)$$

et

$$\int \rho(x) N(x) dx - \bar{N} = 0. \quad (2.12)$$

4. Écrire le lagrangien associé à l'entropie contrainte. On notera respectivement λ_1 , λ_2 et λ_3 les multiplicateurs associés à la densité, à l'énergie et au nombre de particules.
5. En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, montrer que :

$$-k_B \ln(\rho) - k_B - \lambda_1 - \lambda_2 E - \lambda_3 N = 0. \quad (2.13)$$

6. En déduire l'expression de ρ en fonction de k_B , E , N , et des multiplicateurs de Lagrange.
7. En utilisant la condition de normalisation de la question 2, montrer que ρ s'écrit sous la forme :

$$\rho(x) = \frac{1}{\Xi} e^{-\frac{\lambda_2}{k_B} E(x) - \frac{\lambda_3}{k_B} N(x)}, \quad (2.14)$$

où Ξ est la fonction de partition grand-canonique du système.

8. Montrer que l'entropie S s'écrit alors :

$$S = k_B \ln \Xi + \lambda_2 \bar{E} + \lambda_3 \bar{N}. \quad (2.15)$$

9. En calculant les dérivées partielles de S par rapport à \bar{E} et \bar{N} , montrer que :

$$\lambda_2 = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\mu}{T}. \quad (2.16)$$

10. En déduire les expressions de ρ et de Ξ .

Mécanique hamiltonienne

EXERCICE 23. ★ Intégrale de Painlevé.

On considère une particule de masse m repérée par ses coordonnées \mathbf{x} , soumise à un potentiel $V(\mathbf{x}, t)$. La dynamique de cette particule est donnée par le lagrangien $\mathcal{L} = T - V$ où T est l'énergie cinétique de la particule. On choisit un système de coordonnées \mathbf{q} , pouvant dépendre du temps, telles que la position \mathbf{x} s'écrive comme une fonction de \mathbf{q} et t : $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{q}, t)$.

1. Exprimer la vitesse $\dot{\mathbf{x}}$ en fonction de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et t , à l'aide des dérivées partielles de χ .
2. En déduire que l'énergie cinétique s'écrit comme $T = T_2 + T_1 + T_0$, avec T_n homogène de degré n en les vitesses généralisées q_i . Montrer que T_0 et T_1 sont nuls si la fonction χ est indépendante du temps.
3. Démontrer que le hamiltonien du système s'écrit $\mathcal{H} = T_2 - T_0 + V$.

Indication : la formule d'Euler pour une fonction f , homogène de degré n en les variables u_i , s'écrit :

$$\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = n f(u). \quad (3.1)$$

EXERCICE 24. ★ Moments conjugués et hamiltonien d'une particule chargée.

On utilise les conventions et notations de l'exercice 12 traitant le cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. On cherche à transposer ce problème dans la formulation hamiltonienne.

1. Déterminer les moments conjugués p_i associés aux coordonnées x_i . Comparer au cas d'une particule dans un potentiel.
2. Écrire le hamiltonien du système. A-t-il une interprétation énergétique? Quand est-il conservé?
3. On considère un champ électrique constant $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$. On choisit comme potentiels électrique et magnétique $\phi = -E_0 z$ et $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Écrire le lagrangien \mathcal{L} et le hamiltonien \mathcal{H} du système. Le hamiltonien est-il conservé?
4. On considère toujours le même champ électrique constant, mais on se place dans une autre jauge : $\phi' = 0$ et $\mathbf{A}' = -E_0 t \mathbf{e}_z$. Écrire les nouveaux lagrangien \mathcal{L}' et hamiltonien \mathcal{H}' . À l'aide du résultat (??), montrer que l'on retrouve la quantité conservée de la question précédente.

EXERCICE 25. ★★ Particule chargée dans un champ électromagnétique et hamiltonien.

On utilise les notations introduites dans les exercices 12 et 18. On cherche à retrouver la dynamique d'une particule chargée par la formulation hamiltonienne du problème.

1. Les moments conjugués et la hamiltonien du système, en tant que fonctions de \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ et t , ont déjà été calculés. Utiliser ces résultats pour exprimer le hamiltonien comme une fonction sur l'espace des phases (c'est-à-dire comme une fonction de \mathbf{x} , \mathbf{p} et t).
2. Écrire la première équation de Hamilton et retrouver la relation entre $\dot{\mathbf{x}}$ et \mathbf{p} .
3. Écrire la seconde équation de Hamilton et retrouver le PFD pour une particule chargée.

EXERCICE 26. ★★★ Encore !

Reprendre les exemples et les exercices traités dans le chapitre précédent grâce aux équations d'Euler-Lagrange et les transposer dans le formalisme hamiltonien. On pourra notamment :

1. écrire les différents moments conjugués et le hamiltonien du système en fonction de \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ et t ;
2. s'intéresser aux propriétés du hamiltonien : est-il conservé ? a-t-il une interprétation énergétique ? ;
3. effectuer, lorsqu'elle est possible, la transformation $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \mathbf{p}$, et exprimer alors le hamiltonien en fonction de \mathbf{q} , \mathbf{p} et t ; et
4. écrire les équations de Hamilton et les comparer à celles d'Euler-Lagrange.

EXERCICE 27. ★★ Crochets de Poisson du moment cinétique (sujet C 2010, question B.III.3)

On considère un vecteur \mathbf{x} de \mathbb{R}^3 et le moment conjugué \mathbf{p} associé. On définit le moment cinétique \mathbf{L} comme le vecteur $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. En notations indicielles, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$, avec ϵ_{ijk} le tenseur de Levi-Civita totalement antisymétrique, et avec une sommation sous-entendue sur les indices répétés.

1. Calculer les crochets de Poisson $\{L_i, p_j\}$ et $\{L_i, x_j\}$.
2. En déduire le crochet de Poisson $\{L_i, L_j\}$.
3. Établir que $\{L_i, |\mathbf{p}|\} = 0$ et $\{L_i, |\mathbf{x}|\} = 0$.
4. En déduire que pour le mouvement d'une particule dans un potentiel central $V(|\mathbf{x}|)$ indépendant du temps, le moment cinétique \mathbf{L} est une constante du mouvement.

EXERCICE 28. ★★★★★ Problème de Kepler et vecteur de Runge-Lenz (sujet C 2010).

On considère le problème de Kepler, c'est-à-dire le mouvement de deux particules massives interagissant par interaction gravitationnelle. On travaillera ici avec la particule réduite, de position \mathbf{x} , soumise à un potentiel central $V(r) = -K/r$, où $r = |\mathbf{x}|$. Le hamiltonien du système s'écrit :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} |\mathbf{p}|^2 + V(r). \quad (3.2)$$

On pourra réutiliser les résultats de l'exercice précédent. Ici, les calculs des crochets de Poisson vont en difficulté croissante et le dernier est assez laborieux ... avis aux plus courageux !

1. On définit le vecteur de Runge-Lenz :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \mathbf{p} + mK \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad (3.3)$$

soit, en notation indicielle :

$$A_i = \epsilon_{ijk} L_j p_k + mK \frac{x_i}{r}. \quad (3.4)$$

Calculer les crochets de Poisson de A_i avec x_j , p_j , r et $|\mathbf{p}|$.

2. En déduire que \mathbf{A} est une constante du mouvement.
3. Calculer le crochet de Poisson de A_i avec L_j .
4. Calculer le crochet de Poisson de A_i avec A_j .

Symétries et théorème de Noether

EXERCICE 29. ★ Variables quasicycliques et théorème de Noether.

On considère un lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. On suppose qu'il existe une coordonnée généralisée q_i et une grandeur $\mathcal{G}(q, t)$ telles que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}. \quad (4.1)$$

On dira que q_i est une variable quasicyclique de \mathcal{L} .

1. En écrivant l'équation d'Euler-Lagrange pour la coordonnée q_i , trouver une intégrale première du mouvement.
2. Relier la définition de la variable quasicyclique q_i à une symétrie du lagrangien \mathcal{L} . On pourra penser aux translations de coordonnée q_i .
3. Écrire la charge de Noether associée à cette symétrie et comparer à la grandeur conservée obtenue à la première question.
4. Réinterpréter l'exemple de la chute libre grâce à ces résultats.

EXERCICE 30. ★★ Symétries de rotation et moment cinétique.

On considère un lagrangien, de coordonnées cartésiennes $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de la forme $\mathcal{L} = T - V$ où $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ est l'énergie cinétique et $V = V(r)$ est un potentiel central avec $r = |\mathbf{x}|$.

1. Soit R une matrice de rotation. Montrer que le lagrangien \mathcal{L} est invariant sous la transformation de coordonnées $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R\mathbf{x}$.
2. On se concentre sur les rotations d'axe $(0z)$. La rotation d'angle α est donnée par :

$$x^{(\alpha)} = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, \quad y^{(\alpha)} = \cos(\alpha)y - \sin(\alpha)x, \quad z^{(\alpha)} = z. \quad (4.2)$$

Écrire la transformation infinitésimale associée et montrer que le lagrangien \mathcal{L} vérifie la condition de symétrie infinitésimale énoncée dans la section précédente.

3. Écrire la charge de Noether associée. Qu'en est-il pour les rotations d'axes (Ox) et (Oy) ? Interpréter.
4. Exprimer le lagrangien \mathcal{L}' du système en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . Étudier la dépendance de \mathcal{L}' en θ . Que peut-on en conclure? Comparer aux questions précédentes.

EXERCICE 31. ★★★ Particule dans un champ magnétique à direction unique (S. Lacroix).

On considère un champ magnétique dirigé selon l'axe (Oz) et dépendant uniquement de la distance à l'axe $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, tel que :

$$\mathbf{B} = f(\rho)\mathbf{e}_z. \quad (4.3)$$

On plonge une particule massive et chargée dans ce champ.

Que peut-on dire sur son mouvement ?

Indication (1) : on suggère d'abord ce problème avec une approche de mécanique analytique, par exemple lagrangienne.

Indication (2) : on pourra notamment se demander si le système possède des symétries et comment les exploiter.

EXERCICE 32. ★★★ Non-invariance de l'équation d'onde.

On cherche à aller plus loin dans la démonstration de la non-invariance des équations de Maxwell. Une conséquence importante est notamment la non-invariance de l'équation d'onde, qu'il est possible de démontrer en effectuant la transformation des champs issue de la transformée de Galilée.

1. Établir, dans \mathcal{R} , que l'opérateur de l'équation d'onde s'écrit :

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

2. Effectuer la transformée de Galilée et montrer que, dans \mathcal{R}' , cet opérateur devient :

$$\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2}{c^2} (\mathbf{v}_e \cdot \nabla') \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}_e \cdot \nabla') (\mathbf{v}_e \cdot \nabla'). \quad (5.2)$$

Transformations de Lorentz et formalisme tensoriel

EXERCICE 33. ★★ Invariance des équations de Maxwell.

1. Exprimer les coordonnées (ct', x', y', z') dans le repère \mathcal{R}' en fonction des coordonnées (ct, x, y, z) dans le repère \mathcal{R} après transformation de Lorentz.
2. En déduire la transformation des champs et les expressions de E_x, E_y, E_z, B_x, B_y et B_z en fonction de $E'_x, E'_y, E'_z, B'_x, B'_y, B'_z, \gamma, \beta$ et c . En quoi cette transformation des champs diffère-t-elle du cas galiléen ?
3. On suppose que l'équation de Maxwell-Faraday est invariante sous l'action de la transformation de Lorentz. Montrer alors que l'équation de Maxwell-Thomson est elle-aussi invariante et que :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0. \quad (6.1)$$

4. On suppose que l'équation de Maxwell-Ampère est invariante sous l'action de la transformation de Lorentz. Montrer que, dans ce cas, l'équation de Maxwell-Gauss est invariante et que :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla' \cdot \mathbf{E}' = 0. \quad (6.2)$$

EXERCICE 34. ★ Invariance de l'intervalle d'espace-temps.

En effectuant la transformation de Lorentz sur les coordonnées, montrer que l'intervalle d'espace-temps pris dans le repère \mathcal{R} est le même que celui pris dans le repère \mathcal{R}' :

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2. \quad (6.3)$$

EXERCICE 35. ★ Propriétés du produit scalaire.

Établir que, pour des quadrivecteurs X, Y et Z et des scalaires a et b , on a :

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle \quad (6.4)$$

$$\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle \quad (6.5)$$

$$\langle aX, bY \rangle = ab \langle X, Y \rangle. \quad (6.6)$$

EXERCICE 36. ★ Produits scalaires et invariants relativistes.

1. Montrer que le produit scalaire de deux quadrivecteurs est un invariant relativiste, c'est-à-dire qu'il est invariant par changement de repère :

$$\langle X, Y \rangle = \langle X', Y' \rangle. \quad (6.7)$$

2. En déduire que la norme d'un quadrivecteur est un invariant relativiste.
3. De même, montrer que le produit scalaire de deux tenseurs est un invariant relativiste.

EXERCICE 37. ★ Dérivée covariante ou contravariante ?

Il peut sembler étrange que la dérivée covariante (respectivement contravariante) soit la dérivée par rapport aux coordonnées contravariantes (respectivement covariantes) et non l'inverse. En partant du produit scalaire $A \cdot X$, montrer que la dérivée par rapport aux coordonnées covariantes donne bien des coordonnées contravariantes, et inversement.

EXERCICE 38. ★ Changement de variables et dérivées.

Montrer que, sous changement de coordonnées, on a :

$$\partial'_\mu = \partial_\nu L^\nu_\mu \quad \text{et} \quad \partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu. \quad (6.8)$$

EXERCICE 39. ★ Non-dépassement de la vitesse de la lumière.

En remarquant que la condition $v \leq c$ peut se traduire par $\mathbf{v}_\parallel^2 + \mathbf{v}_\perp^2 \leq c^2$, montrer qu'après transformation de Lorentz on a toujours $v' \leq c$.

EXERCICE 40. ★ Composition des vitesses : approche directe.

Appliquer la transformée de Lorentz directement au vecteur position, et calculer les dérivées des différentes coordonnées par rapport au temps t . En déduire la loi de composition des vitesses.

EXERCICE 41. ★★★ Effet Doppler relativiste.

On se propose d'introduire des notions d'électromagnétisme dans le formalisme tensoriel. Afin d'étudier le comportement d'un photon, il est nécessaire de considérer le quadrivecteur permettant sa description du point de vue relativiste. On définit le quadrivecteur énergie-impulsion K comme :

$$K = K^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

où ω est la fréquence du photon, et k_x , k_y et k_z les composantes de son vecteur d'onde \mathbf{k} .

1. Justifier que la phase $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ est un invariant relativiste.
2. En utilisant la loi de dispersion d'un photon, montrer que la norme $K^\mu K_\mu$ du quadrivecteur énergie-impulsion associé est nulle.

On suppose qu'une source S , fixe par rapport à un observateur \mathcal{O} , émet une onde électromagnétique. Un second observateur \mathcal{O}' , en translation rectiligne uniforme à vitesse $v_e \mathbf{e}_x$ par rapport à \mathcal{O} , voit ce photon.

3. En écrivant $\mathbf{k} = k_\parallel \mathbf{e}_x + \mathbf{k}_\perp$ (et $\mathbf{k}' = k'_\parallel \mathbf{e}_x + \mathbf{k}'_\perp$), écrire la transformée de Lorentz du quadrivecteur énergie-impulsion du repère \mathcal{R} vers \mathcal{R}' .
4. On note θ (respectivement θ') l'angle mesuré, dans le repère \mathcal{R} lié à \mathcal{O} (respectivement \mathcal{R}' lié à \mathcal{O}'), entre \mathbf{v}_e et \mathbf{k} (respectivement \mathbf{k}'). Montrer que l'effet Doppler relativiste est donné par :

$$\omega' = \gamma_e \omega (1 - \beta_e \cos \theta) \quad \text{et} \quad \omega = \gamma_e \omega' (1 + \beta_e \cos \theta'). \quad (6.10)$$

5. En déduire que :

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_e \cos \theta - \beta_e}. \quad (6.11)$$

On considère le cas où le photon est émis selon l'axe de translation de \mathcal{O}' par rapport à \mathcal{O} , c'est-à-dire : $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}'_\perp = \mathbf{0}$.

6. Que valent les angles θ et θ' ?

7. Montrer que si \mathcal{O}' s'approche de la source on a :

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}} > \omega. \quad (6.12)$$

8. Montrer que, dans la limite galiléenne, on retrouve l'effet Doppler classique :

$$\omega' \simeq (1 + \beta_e)\omega. \quad (6.13)$$

On considère maintenant le cas où $\mathbf{k}'_{\perp} \perp \mathbf{v}_e$, donc $\theta' = \pi/2$.

9. Établir qu'on a alors :

$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma_e} = \omega \sqrt{1 - \beta_e^2}. \quad (6.14)$$

10. Justifier que $\omega' < \omega$. A-t-on ce résultat en relativité galiléenne ?

EXERCICE 42. ★ Énergie de repos et fission nucléaire.

Les noyaux des atomes peuvent être vus comme des agrégats de protons et de neutrons, qu'il est possible de séparer : c'est le principe de la fission nucléaire. On cherche à montrer que cette fission nucléaire permet de libérer de l'énergie. On rappelle la définition de l'électron-volt : $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ V}$.

1. En utilisant l'équivalence masse-énergie, calculer la masse au repos d'un électron et d'un proton, sachant que la masse d'un électron est $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et que celle d'un proton est $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. On l'exprimera en MeV/c^2 .
2. Calculer la différence entre la masse de l'atome d'hydrogène et les masses de ses différents constituants et montrer qu'il existe un défaut de masse non-nul $\Delta M = M_p + M_e - M(H)$.
3. Calculer de même, pour le deutéron : $\Delta M = M_p + M_n + M_e - M(D)$. Quelle est la différence dans les forces en jeu ?
4. On définit l'énergie de liaison comme :

$$W(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - M({}_Z^A X). \quad (7.1)$$

Calculer cette énergie pour l'uranium 235 et pour les premiers éléments de sa chaîne de réaction nucléaire. Justifier que la réaction de fission, pour des éléments lourds, est exothermique. Est-ce le cas pour tous les éléments ?