Colloque Jeunes Chercheurs en Théorie des Nombres
13-14-15 juin 2012
Exposés des participants

Ramla Abdellatif : *Modules de Hecke-Iwahori et représentations modulo p de groupes réductifs p-adiques*

Soit p un nombre premier. Lorsque G est un groupe de Lie p-adique, comme par exemple $GL_n(\mathbf{Q}_p)$ ou $SL_n(\mathbf{Q}_p)$, la théorie des représentations lisses de G à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique p diffère sensiblement de celle à coefficients complexes, et reste à l'heure actuelle très mystérieuse : les seuls cas complètement traités jusqu'ici sont ceux de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et de $SL_2(\mathbf{Q}_p)$. L'une des causes de cette différence réside dans l'existence de vecteurs invariants non nuls sous l'action d'un pro-p-sous-groupe arbitraire de G, ce qui suggère une nouvelle approche via l'étude des modules à droite sur certaines algèbres d'endomorphismes, dites algèbres de Hecke-Iwahori, et ramène à l'utilisation d'outils plus algébriques.

En utilisant le cas de $SL_2(\mathbf{Q}_p)$ pour illustrer notre propos, nous expliquerons les liens entre ces deux théories, les résultats obtenus de cette manière, ceux que l'on peut espérer obtenir et, si le temps le permet, nous présenterons de manière plus détaillée quelques constructions explicites.

Samuele Anni : *A local-global principle for isogenies of prime degree over number fields*

In a recent work, Sutherland studied the local-global principle about existence of ℓ-isogenies for elliptic curves defined over a number field. The proof of this theorem is deeply connected to Galois representations. He has also been able to show that there is only one exception over the rationals. In this talk we will give a brief summary of Sutherland's article, and we will state new results about exceptions to the local-global principle.

Damien Bernard : *Statistiques des zéros non-triviaux de fonctions L*

Dans cet exposé, je présenterai une approche statistique des zéros non-triviaux des fonctions L et m'intéresserai plus particulièrement à la hauteur du plus petit de ces zéros.

Prasenjit Bhowmik : *On the arithmetics of Drinfeld quasi-modular forms*

Following the remarkable work of Kaneko and Zagier on quasi-modular forms in the classical case, Bosser and Pellarin introduced the ring of 'Drinfeld quasi-modular forms' for $GL_2(\mathbb{F}_q[T])$ endowed with a differential structure.

We will discuss on the $\mathbb{F}_q[T]$-algebra of such forms and some interesting arithmetics around them in the function field of positive characteristic.

Luca Caputo : *Modules galoisiens de torsion et théorème de Stickelberger*

Dans une extension galoisienne de corps de nombres, certains modules de torsion apparaissent assez naturellement. Si L/K est une telle extension et on note G son groupe de Galois, un module de torsion typique est $\mathcal{O}_L/I$ où $\mathcal{O}_L$ est l'anneau des entiers de L et I est un idéal stable par l'action de G. Lorsque L/K est modérée, un tel module définit un élément du groupe de classes de $\mathbb{Z}[G]$, à savoir la différence entre les classes d'$\mathcal{O}_L$ et I. En particulier, lorsque I est la différente de L/K ou sa racine carrée, on montrera que la trivialité de la classe de $\mathcal{O}_L/I$ peut être démontrée en utilisant des résultats d'annulation galoisienne du groupe de classes d'extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}$. Il s'agit d'un travail en collaboration avec S. Vinatier.

Alessandro Cobbe : *Autour d'une conjecture sur les classes de Steinitz d'extensions galoisiennes*

Soit K/k une extension finie de corps de nombres et l'on note $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_k$ les anneaux d'entiers, respectivement. La structure de $\mathcal{O}_k$-module de $\mathcal{O}_K$ est complètement déterminée par le degré de K/k et par une classe (dite de Steinitz) dans le groupe de classes $\mathrm{Cl}(k)$ de k. Soit maintenant G un groupe fini. Classiquement on s'intéresse au sous-ensemble $\mathrm{R_t}(k, G)$ de $\mathrm{Cl}(k)$ constitué par les classes qui sont classes de Steinitz d'extensions galoisiennes modérément ramifiées de groupe G de k. Suite à des travaux de McCulloh et de ses élèves, on conjecture que $\mathrm{R_t}(k, G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Cl}(k)$. Après une introduction sur le sujet, on proposera des résultats qui généralisent tout ce qui était connu jusqu'ici sur cette conjecture. Il s'agit d'un travail en commun avec Luca Caputo.

Giovanni Di Matteo : *Produits tensoriels et objets de Schur admissibles en théorie de Hodge p-adique*

Si W et W' sont deux B-paires avec produit tensoriel cristalline (ou semi-stable, ou de de Rham, ou de Hodge-Tate), alors il existe un caractère μ tel que $W(\mu^{-1})$ et $W'(\mu)$ sont cristallines (ou semi-stable, ou de de Rham, ou de Hodge-Tate). De même, si F est un foncteur de Schur (par exemple, Sym^n ou Λ^n) tel que $F(W)$ est cristalline (ou semi-stable, ou de de Rham, ou de Hodge-Tate) et si le rang de W est assez grand, alors il existe un caractère μ tel que $W(\mu^{-1})$ en est. Ces résultats s'appliquent en particulier aux représentations p-adiques.

Sary Drappeau : *Sur les solutions friables à l'équation $a + b = c$*

Un entier est dit y-friable si tous ses facteurs premiers sont inférieurs à y. Inspiré par la conjecture *abc* de Masser et Oesterlé, l'étude asymptotique par rapport à x et y des solutions entières à l'équation $a+b=c$ qui sont y-friables et inférieures à x est une application intéressante de la méthode du cercle et de l'étude des sommes d'exponentielles sur les friables par la méthode du col. Suivant le travail de Lagarias et Soundararajan, cet exposé aura pour but de présenter les principes et les limites de ces méthodes dans ce contexte.

Richard Griffon : *Du théorème de Brauer-Siegel classique à un analogue conjectural*

Le théorème du titre (1947) décrit la croissance du nombre de classes $h(K)$ et du régulateur $R(K)$ d'un corps de nombres K lorque le discriminant $|\operatorname{disc}(K)|$ tend vers l'infini (à degré $[K:\mathbb{Q}]$ fixé) : plus précisément $\log(h(K)\cdot R(K)) \sim \log(\sqrt{|\operatorname{disc}(K)|}$.

Je décrirai les ingrédients de la preuve de ce résultat puis j'expliquerai comment on peut conjecturer une relation analogue pour d'autres familles de groupes algébriques (variétés abéliennes, tores, ...) sur des corps globaux. Dans le cadre des variétés abéliennes, on verra quelles seraient les implications d'une telle relation asymptotique.

Robin Guilbot : *Arithmétique dans des variétés toriques sur les corps $C1$*

Les variétés toriques peuvent être considérées comme les variétés algébriques abstraites les plus simples car les plus ressemblantes à l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. En particulier elles sont naturellement munies d'un anneau de coordonnées homogènes (comme l'a montré David Cox en 1995), et graduées par un groupe abélien de type fini.

Les corps $C1$, ou quasi algébriquement clos, sont les corps sur lesquels toute hypersurface de $\mathbb{P}^n$ possède un point rationnel dès que son degré est inférieur ou égal à n. Il est naturel de se demander comment cette notion de petit degré peut s'étendre de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ à toute variété torique complète.

Je traiterai le cas des variétés toriques lisses et donnerai un critère explicite d'existence de points rationnels sur une hypersurface donnée par une équation en coordonnées homogènes.

Mathilde Herblot : *Versions géométriques du théorème de Schneider-Lang*

Le théorème de Schneider-Lang est un critère classique de transcendance pour des nombres complexes. Il dit que des fonctions méromorphes d'ordre fini, vérifiant une équation différentielle polynomiale à coefficients dans un corps de nombres et algébriquement indépendantes ne peuvent prendre simultanément des valeurs dans ce corps de nombres qu'en un nombre fini de points.

Comme corollaire, on obtient par exemple directement la transcendance de e, π, $\log 2$ ou e^a pour tout a algébrique non nul.

Dans cet exposé, je présenterai des généralisations géométriques de ce critère, valables sur le corps des nombres complexes ou sur un corps p-adique. En dimension 1, j'exposerai notamment un théorème concernant des sous-schémas formels admettant une uniformisation par une courbe algébrique affine. Les démonstrations de ces résultats reposent sur la méthode des pentes développée par J.-B. Bost et utilisent le langage de la géométrie d'Arakelov.

Sean Howe : *Contre-exemples à la conjecture Manin-Mumford relative sur les variétés Jacobiennes*

Nous décrirons une construction géométrique du contre-exemple (dû a Bertrand) à la conjecture Manin-Mumford relative de Pink qui généralise celle de Edixhoven dans le cas des courbes elliptiques à multiplication complexe. Nous aborderons le cas de la variété Jacobienne d'un courbe de genre quiconque admettant une isogènie antisymétrique et nous montrons comment se servir du procédé de pincement pour produire une famille d'extensions semi-abéliennes et une section de petite dimension dans laquelle les points de torsion sont denses.

Yong Hu : *Principe de Hasse pour les torseurs sur les corps de fonctions de courbes p-adiques*

Soit K le corps de fonctions d'une courbe p-adique, G un groupe semi-simple simplement connexe sur K et X un G-torseur. Une conjecture de Colliot-Thélène, Parimala et Suresh énonce que si pour toute valuation discrète v de K, X a des points à valeurs dans le complété K_v, alors X a un K-point rationnel. Dans cet exposé, on discute cette conjecture pour les torseurs de certains groupes de types classiques.

Ariyan Javanpeykar : *Arakelov invariants of curves*

For any curve over a number field, we explicitly bound the Faltings height polynomially in its Belyi degree. This settles a conjecture of Edixhoven, de Jong and Schepers. Moreover, to illustrate our results, we apply them to modular curves, Fermat curves and Galois Belyi covers. Finally, we give a proof of Szpiro's small points conjecture for cyclic covers of the projective line.

Arthur Laurent : *Majoration optimale des nombres de Tamagawa d'une représentation p-adique absolument cristalline*

Soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension non-ramifiée, finie et V une représentation p-adique cristalline du groupe de Galois absolu de K. Lorsque que les poids de Hodge-Tate de V sont tous strictement positifs (ou tous négatifs), il est facile de calculer de nombres de Tamagawa de V le long de la tour cyclotomique de K. Dans les autres cas, il n'existe pas de formule explicite pour les calculer. Dans cet exposé, je proposerai une majoration optimale (ainsi qu'une minoration non-optimale) de ces nombres.

Samuel Le Fourn : *Surjectivité uniforme des représentations galoisiennes de* $\mathbf{Q}$*-courbes*

Un problème posé par Serre consiste à savoir s'il existe une borne uniforme p_0 telle que pour toutes les courbes elliptiques E sur $\mathbf{Q}$ sans CM, la représentation de Galois sur la p-torsion de E est surjective pour tout $p > p_0$ premier. Nous allons ici nous intéresser à un cas un peu différent, celui des $\mathbf{Q}$-courbes (redéfinies dans l'exposé) et montrer un résultat de surjectivité uniforme lorsque celles-ci sont définies sur un corps quadratique imaginaire fixé, mais pas sur $\mathbf{Q}$. Ce sera également l'occasion d'expliquer les arguments principaux de preuves récentes en direction du problème d'uniformité classique.

Pierre Lezowski : *Corps de quaternions euclidiens*

Soient K un corps de nombres, F un corps de quaternions sur K et $\mathcal{O}$ un ordre de F. Je présenterai quelques techniques pour étudier l'euclidianité de $\mathcal{O}$ par rapport à la norme ou à un stathme quelconque. En m'appuyant sur la construction de Motzkin et les propriétés générales des corps de quaternions, je décrirai ensuite le cas particulier où F est totalement défini sur un corps K quadratique.

Yongqi Liang : *Principe local-global pour les zéro-cycles*

On discute le principe local-global pour les zéro-cycles sur les variétés algébriques définies sur un corps de nombres. Certains résultats récents seront présentés.

Alain Muller : *Relèvements en des représentations potentiellement semistables*

On démontre que toute représentation modulo p du groupe de Galois absolu d'une extension finie K admet un relèvement en caractéristique 0 en une représentation potentiellement semistable. On démontre que dans beaucoup de cas, on peut se fixer à l'avance les poids de Hodge-Tate. Il est également possible (sans fixer les poids) d'obtenir des représentations cristallines (là aussi dans beaucoup de cas) : cela démontre que l'ensemble des poids de Serre (définis par exemple par Buzzard-Diamond-Jarvis ou Gee-Herzig-Savitt) apparaissant dans les généralisations de la conjecture de Serre est non vide.

Vésale Nicolas : *Quelques résultats équivariants sur les valeurs spéciales des fonctions L p-adiques*

On cherche depuis longtemps à généraliser la formule analytique du nombre de classes. La conjecture la plus célèbre du domaine est certainement celle de Birch et Swinnerton-Dyer, qui est un cas très particulier des conjectures équivariantes des nombres de Tamagawa (ETNC) énoncées par Bloch ; Kato ; Fontaine ; Perrin-Riou ; Burns et Flach (1990-2001).

Malheureusement, si l'on dispose de nombreuses conjectures, les théorèmes sont moins nombreux. Le résultat le plus marquant est le théorème de Burns-Greither (2003) : il donne, dans le cas des corps abéliens, une formule analytique du nombre de classes Galois-équivariante.

Dans cet exposé, nous chercherons à montrer comment la théorie d'Iwasawa permet de donner des résultats similaires sur les valeurs spéciales des fonctions L p-adiques. La nouveauté essentielle portera sur les valeurs spéciales des fonctions L p-adiques aux entiers positifs.

Boualem Sadaoui : *Valeurs aux entiers négatifs d'une classe de séries de Dirichlet multiples*

Dans cet exposé, nous donnons quelques résultats sur les valeurs aux entiers négatifs d'une classe des séries de Dirichlet associée au produit des polynômes de plusieurs variables qui vérifient certaines conditions.

Andrea Siviero : *Équidistribution de la structure Galoisienne des anneaux des entiers avec comportement local donné.*

Soit K un corps des nombres et G un groupe abélien fini. Melanie Wood a étudié, il y a quelques années, les probabilités de différentes décompositions d'un idéal fixé dans une G-extension aléatoire de K. Lorsque les extensions sont comptées par conducteur, elle a montré que les probabilités sont celles prévues par des méthodes heuristiques et indépendantes pour différents idéaux premiers. En parallèle, Adebisi Agboola a étudié le comportement asymptotique du nombre de G-extensions de K modérément ramifiées avec fixée classe réalisable d'anneau des entiers, vu comme module Galoisien. Il a montré qu'il y a une équidistribution quand les extensions de K sont comptées par la norme absolue des idéaux premiers de K ramifiés. Une question naturelle se pose : les deux distributions de Wood et Agboola sont-elles indépendantes ? Dans cet exposé j'aborde l'équidistribution des classes réalisables pour les extensions totalement ramifiées en un idéal premier de K fixé.

Arne Smeets : *Principes locaux-globaux pour certaines équations normiques*
Soit k un corps de nombres et K/k une extension finie. Soit $P(t)$ un polynôme à coefficients dans k. On étudie le principe de Hasse et l'approximation faible pour les équations de la forme $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$. Dans certains cas, on démontre que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour toute compactification lisse d'une variété donnée par une telle équation.

Firmin Varescon : *Calcul de la* $\mathbf{Z}_p$*-torsion de* $\mathfrak{X}_0$
Soient p un nombre premier et K un corps de nombres vérifiant la conjecture de Leopoldt. On désigne par M_0 la pro-p-extension abélienne non-ramifiée en dehors de p, maximale de K. L'objectif de cet exposé est d'étudier la torsion du $\mathbf{Z}_p$-module $\mathfrak{X}_0 = \mathrm{Gal}(M_0/K)$ et de déterminer une méthode permettant de calculer effectivement la structure de ce $\mathbf{Z}_p$-module. On note par $\tilde{K}$ le compositum des $\mathbf{Z}_p$-extensions de K et par $\mathcal{T}_p$ cette torsion, on a alors $\mathcal{T}_p \simeq \mathrm{Gal}(M_0/\tilde{K})$. On recherche alors à calculer n pour que $\mathrm{Gal}(H_0^{p^n}/\tilde{K} \cap H_0^{p^n}) \simeq \mathcal{T}_p$ où $H_0^{p^n}$ est le compositum de toutes les p-extensions de K dont le conducteur divise p^n. Puis on donnera quelques résultats numériques, qui s'interprètent comme des heuristiques à la Cohen-Lenstra.

Mathieu Vienney : *Représentations modulo p d'un sous-groupe de Borel de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$
Dans sa construction d'une correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Colmez a décrit une construction permettant d'associer à une représentation $\overline{\mathbf{F}_p}$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ une représentation lisse d'un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Après avoir rappelé les principaux ingrédients de cette démonstration, nous montrons que toutes les représentations $\overline{\mathbf{F}_p}$-linéaires lisses irréductibles du Borel sont obtenues de cette manière.

Stéphane Viguié : *La conjecture principale d'Iwasawa, dans les extensions abéliennes de corps quadratiques imaginaires*
On considère un corps quadratique imaginaire k, et un nombre premier $p \notin \{2,3\}$ décomposé dans k. Soit k_∞ l'unique $\mathbf{Z}_p^2$-extension de k. Soit K_∞ une extension de degré fini de k_∞, abélienne sur k. On pose $G_\infty := \mathrm{Gal}\,(K_\infty/k)$, et on fixe arbitrairement une décomposition $G_\infty = G \times \Gamma$, où $G = \mathrm{Gal}\,(K_\infty/k_\infty)$ est un groupe fini et $\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p^2$.

Dans ce contexte, pour toute extension abélienne de degré fini F/k, est défini un groupe d'unités elliptiques C_F, qui est un sous-groupe du groupe des unités globales $\mathcal{O}_F^\times$. On pose $\mathcal{C}_F := \mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{C}_F$ et $\mathcal{E}_F := \mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_F^\times$, puis on définit

$$\mathcal{C}_\infty := \varprojlim_F \mathcal{C}_F \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_\infty := \varprojlim_F \mathcal{E}_F,$$

où les limites projectives sont prises par rapport aux normes, sur l'ensemble des sous-extensions $F \subseteq K_\infty$ de k telles que $[F : k] < \infty$. Pour toute extension abélienne de degré fini F/k, on note A_F la p-partie du groupe des classes $\mathrm{Cl}\,(\mathcal{O}_F)$. Comme précédemment, on définit $\mathrm{A}_\infty := \varprojlim_F \mathrm{A}_F$.

Utilisant les unités elliptiques, on construit des systèmes d'Euler à l'aide des-quels on démontre une égalité d'idéaux caractéristiques, égalité qui est l'une des versions de la conjecture principale d'Iwasawa dans ce contexte.

Plus précisément, soit χ un $\mathbf{C}_p$-caractère irréductible de G, et soit $\mathbf{Z}_p(\chi)$ le sous-anneau de $\mathbf{C}_p$ engendré par $\mathbf{Z}_p$ et les valeurs de χ. Pour tout $\mathbf{Z}_p[G]$-module M, soit $M_\chi := \mathbf{Z}_p(\chi) \otimes_{\mathbf{Z}_p[G]} M$ le χ-quotient de M. Notons $\Lambda := \mathbf{Z}_p\,[[G_\infty]]$ l'algèbre d'Iwasawa. Son χ-quotient Λ_χ est un anneau nœthérien local factoriel, en particulier l'idéal caractéristique $\mathrm{char}_{\Lambda_\chi} V$ est bien défini pour les Λ_χ-modules V de type fini et de torsion.

Notons que $\mathcal{E}_\infty$, $\mathcal{C}_\infty$, et A_∞ sont naturellement munis de structures de Λ-modules. Nous montrons que les χ-quotients $\left(\mathcal{E}_\infty/\mathcal{C}_\infty\right)_\chi$ et $\left(\mathrm{A}_\infty\right)_\chi$, qui sont de type fini de torsion sur Λ_χ, ont le même idéal caractéristique,

$$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}\left(\mathcal{E}_\infty/\mathcal{C}_\infty\right)_\chi = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}\left(\mathrm{A}_\infty\right)_\chi .$$