

## TD 1

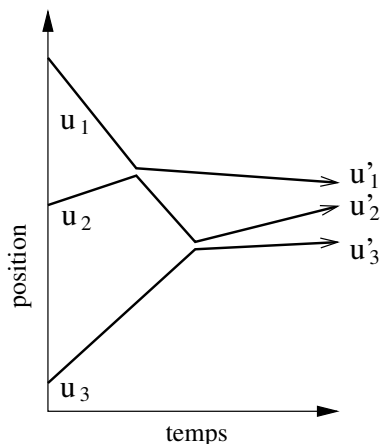
### Effondrement inélastique d’une colonne de billes

*L’inélasticité des collisions entre deux billes intervient de façon cruciale dans la dynamique des matériaux granulaires dilués. Par exemple, elle est à l’origine de la formation d’amas dans un milieu granulaire. Le but de ce TD est de mettre en évidence ce phénomène appelé “effondrement inélastique” (“inelastic collapse”) dans le cas d’une colonne de billes.*

#### I. Résolution exacte pour $N = 3$

Nous allons dans cette première partie étudier le cas de trois billes et trouver la valeur critique du coefficient de restitution  $e$  en dessous de laquelle la colonne s’effondre et au-dessus de laquelle elle se disperse.

La figure ci-contre montre un exemple de trajectoires dans lequel la première collision a lieu entre les billes 1 et 2. Une deuxième collision se produit ensuite entre les billes 2 et 3. Nous allons exprimer cette transformation sur les vitesses sous forme matricielle.



1. On rappelle que le coefficient de restitution  $e$  pour une collision entre deux billes  $i$  et  $j$  de masses et tailles identiques est défini par (où  $*$  désigne les vitesses dans le référentiel barycentrique et  $'$  les vitesses après la collision) :

$$\begin{cases} u_i^*{}' = -e u_i^* \\ u_j^*{}' = -e u_j^* \end{cases}$$

En déduire la relation suivante :

$$\begin{cases} u_i' = q u_i + p u_j \\ u_j' = p u_i + q u_j \end{cases}, \text{ avec } \begin{cases} p = (1 + e)/2 \\ q = (1 - e)/2 \end{cases}$$

2. En supposant que la première collision a lieu entre les billes 1 et 2, montrer qu’après les deux premières collisions, les vitesses s’écrivent :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}' = \mathcal{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ p & q & p \\ p^2 & p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

3. Comment la matrice  $\mathcal{M}$  est-elle modifiée si la première collision a lieu entre les billes 2 et 3 ?  
Quelle relation y a-t-il entre les valeurs propres de ces deux matrices ?
4. On peut montrer rigoureusement que l'effondrement se produit s'il existe au moins une valeur propre réelle  $\lambda$  telle que :  $0 \leq \lambda < 1$ .  
Comment justifier ce résultat avec des arguments plus heuristiques ("avec les mains") ?
5. Cherchons les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{M}$ , solutions de l'équation :  $\det(\mathcal{M} - \lambda I) = 0$ .  
Exprimer le déterminant  $\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{M} - \lambda I)$  en fonction de  $p$  et  $q$ .
6. En remarquant que  $p + q = 1$ , montrer que  $\lambda = 1$  est une racine évidente de  $\Delta$ .
7. Montrer alors que :  $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda) \left( \lambda^2 - \lambda \frac{1 - 6e + e^2}{4} + e^2 \right)$
8. A quelle condition sur  $e$  existe-t-il une valeur propre réelle  $0 \leq \lambda < 1$  ?
9. Sous cette condition, montrer que les deux valeurs propres réelles non triviales ( $\neq 1$ ) sont inférieures à  $1/4$ .
10. Conclure sur la valeur critique du coefficient de restitution limitant l'effondrement dans le cas de trois billes.

## II. Modèle du coussin sur un mur inélastique

On considère maintenant une colonne de  $N$  billes numérotées de la droite vers la gauche (cf. figure 1). Toutes les billes sont initialement au repos à l'exception de la première bille :  $u_1 = -1$ . Un mur inélastique (caractérisé par la même restitution que les collisions entre billes) est situé avant la dernière bille.

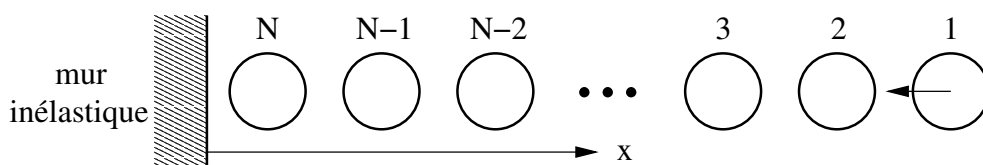


FIG. 1 – Colonne de billes limitée par un mur inélastique

Au cours d'une première phase (phase 1), l'onde impulsée par la première bille se déplace vers le mur. La  $N^{\text{ième}}$  bille rebondit ensuite sur le mur. Enfin, l'onde remonte la colonne de billes au cours de la phase 2, jusqu'à atteindre la première bille. Les deux phases sont visibles sur la figure 2 qui donne les trajectoires des billes pour  $N = 10$ , et  $e = 0.72$  (gauche) et  $e = 0.76$  (droite).

Les billes inférieures constituent ainsi un "coussin" pour la première bille. Le but de ce modèle est de déterminer quand le coussin est suffisamment absorbant pour que la première bille se déplace en direction du mur à l'issue de la phase 2.

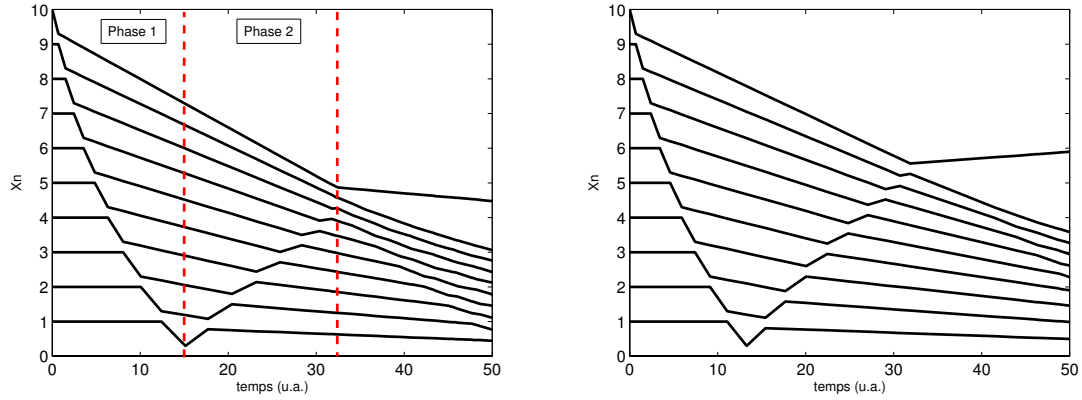


FIG. 2 – Trajectoires pour  $N = 10$ , et  $e = 0.72$  (gauche) et  $e = 0.76$  (droite)

1. Expliquer pourquoi à la fin de la phase 1 (juste avant la collision avec le mur), les vitesses s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{n < N} &= -q p^{n-1} \\ u_N &= -p^{N-1} \end{cases}$$

2. Exprimer  $u_N$  après la collision avec le mur (on ne remplacera pas  $p$  et  $q$  par leur expression).
3. Exprimer  $u_{N-1}$ ,  $u_{N-3}$  et  $u_{N-5}$  à l'issue de la phase 2.
4. En remarquant que  $u_1 = u_{N-(N-1)}$ , montrer que  $u_1$  à l'issue de la phase 2 vaut :

$$u_1 = e p^{2(N-1)} - q^2 \frac{1 - p^{2(N-1)}}{1 - p^2}$$

5. Nous allons considérer qu'il y a effondrement si à l'issue de la phase 2,  $u_1 < 0$  et dispersion si  $u_1 > 0$ . Expliquer pourquoi ce critère n'est qu'une approximation.
6. Sous cette hypothèse, la transition entre effondrement et dispersion correspond donc à  $u_1 = 0$ . Montrer que cette équation équivaut à :

$$p^{2(N-1)} [e(1 - p^2) + q^2] = q^2$$

7. En déduire l'expression de la valeur critique de  $N_c$  :

$$N_c = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{1-e}{4}}{\ln \frac{1+e}{2}}$$

8. Calculer les valeurs limites de  $N(e)$ ,  $0 \leq e < 1$  et tracer l'allure de la courbe  $N(e)$ .
9. Considérons une colonne de  $N$  billes sans le mur inélastique. Cette situation sera étudiée lors du TD consacré aux simulations numériques. Comment le modèle du mur inélastique permet-il de prédire la transition effondrement/dispersion dans le cas sans mur ? Commenter la valeur de  $N_c$  en  $e = 0$ .
10. Expliquer grâce aux questions précédentes comment déterminer la valeur critique exacte de  $e$  pour une colonne de 4 billes sans mur et montrer qu'elle vaut  $e_4 = 3 - 2\sqrt{2}$ .

## TD 2

### Empilements de grains

*Dans le TD 1, nous avons considéré le choc entre deux grains et étudié la force normale au cours de la collision. Ici, on se propose d'étudier l'empilement d'un grand nombre de grains de tailles éventuellement différentes. On s'intéresse plus particulièrement à la compacité (ou fraction volumique)  $\phi$  de l'empilement définie comme le rapport du volume occupé par les grains au volume total occupé par l'empilement.*

#### I. Empilement de sphères bidisperses

On considère un mélange de petits grains de rayon  $R_p$  et de gros grains de rayon  $R_g \gg R_p$  de même densité  $\rho$ . On cherche la compacité d'un empilement constitué d'une masse  $M_p$  de petits grains et d'une masse  $M_g$  de gros grains. On note  $C$  la concentration massique de grosses billes dans le mélange :

$$C = \frac{M_g}{M_g + M_p}. \quad (1)$$

1. Soit  $\phi_0$  la compacité de l'empilement lorsqu'il n'y a qu'un seul type de grains. Rappeler les valeurs accessibles de  $\phi_0$  selon l'empilement monodisperse considéré. De quoi dépend la valeur de  $\phi_0$  ? Dans la suite, on supposera que  $\phi_0$  prend la même valeur pour les petits grains et pour les gros grains.
2. On considère tout d'abord un faible nombre de petits grains dans un empilement de gros grains. Ce cas est représenté sur la figure 1(a). Calculer  $\phi$  en fonction de  $\phi_0$  et  $C$ .
3. On considère maintenant le cas inverse d'un faible nombre de gros grains dans un empilement de petits grains (cf. figure 1(b)). Calculer à nouveau  $\phi$  en fonction de  $\phi_0$  et  $C$ .
4. La figure 2 montre la compacité de mélanges bidisperses pour différents rapports de diamètres. Identifier les deux limites discutées ci-dessus. Commenter l'évolution des résultats expérimentaux en fonction du contenu en gros grains et du diamètre des petits grains. Quelle application pratique peut-on envisager ? En considérant l'intersection des deux courbes limites, vérifier que l'axe des abscisses noté “% Coarse spheres in mixture” correspond bien à la fraction massique  $C$ .

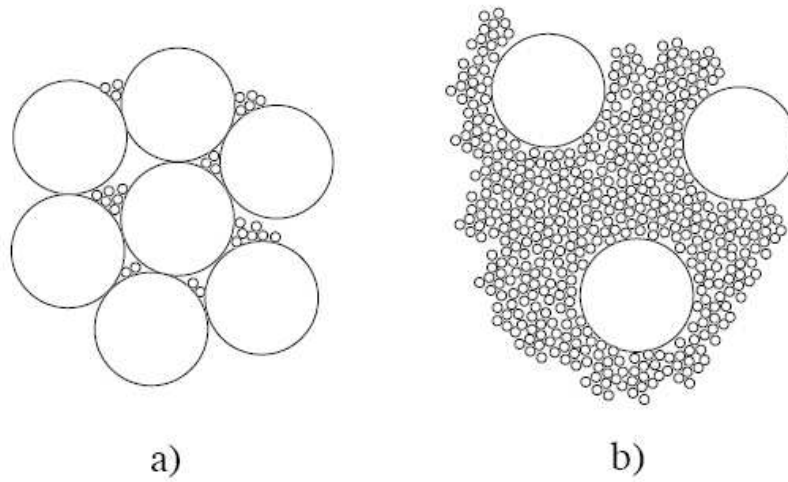


FIG. 1 – Cas extrêmes d’empilements bidisperses : (a) peu de petits grains dans beaucoup de gros et (b) beaucoup de petits grains dans peu de gros.

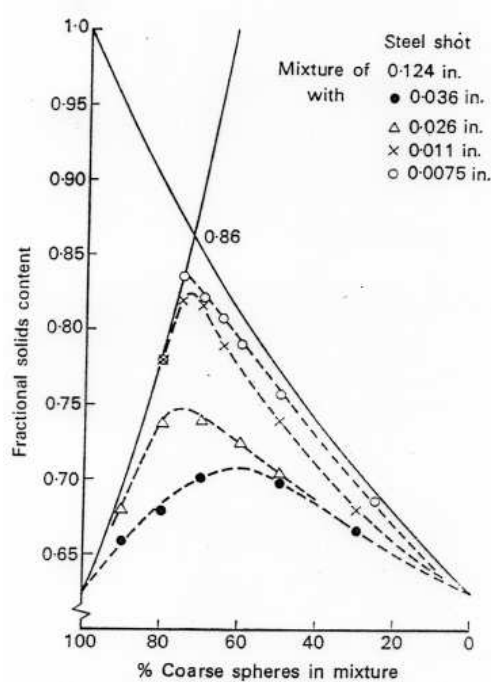


FIG. 2 – Compacité de mélanges bidisperses pour différents rapports de diamètres en fonction du contenu en gros grains. Figure extraite de D. J. Cumberland & R. J. Crawford, “The packing of particles,” *Handbook of Powder Technology*, Vol. 6 (Elsevier, Amsterdam, 1987).

## II. Empilement apollonien

### 1. Théorème de Descartes

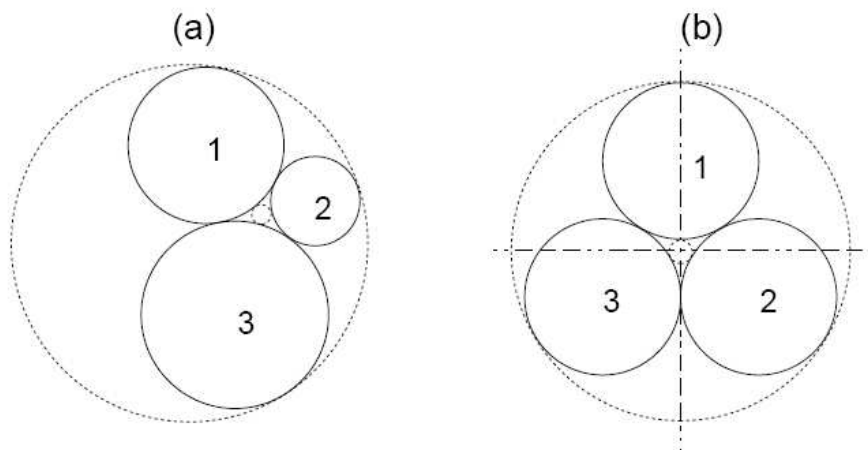


FIG. 3 – Problème des trois cercles. (a) Cas général (b). Cas particulier de trois cercles identiques.

“Trois cercles étant donnés, décrire un quatrième cercle que ceux-ci touchent.” C’est ainsi qu’au III<sup>ème</sup> s. av. J.-C., Apollonius de Perga, géomètre et astronome grec, définissait le *problème des trois cercles* représenté sur la figure 3(a). On dit que quatre cercles tangents mutuellement forment une *configuration de Descartes*. On note  $r_i$  le rayon du  $i^{\text{ème}}$  cercle et  $c_i = 1/r_i$  sa courbure.

**1.1** Montrer que si quatre cercles forment une configuration de Descartes, alors

$$(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 = 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2). \quad (2)$$

Bien que de nombreux auteurs en aient donné une démonstration avant lui, cette relation est connue sous le nom de *théorème de Descartes* (1643).<sup>1</sup>

**1.2** Les trois premiers cercles étant donnés, déduire de ce qui précède qu’il existe deux cercles répondant au problème (en pointillés sur la figure 3(a)) et exprimer  $c_4$  en fonction de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ .

**1.3** On admet que si on représente le centre du  $i^{\text{ème}}$  cercle de coordonnées cartésiennes  $(x_i, y_i)$  par le nombre complexe  $z_i = x_i + iy_i$ , alors une configuration de Descartes vérifie

$$(c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + c_4 z_4)^2 = 2(c_1^2 z_1^2 + c_2^2 z_2^2 + c_3^2 z_3^2 + c_4^2 z_4^2). \quad (3)$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de Descartes complexe*. Dans le cas particulier où les trois cercles initiaux sont identiques (cf. fig. 3(b)), vérifier que les équations (2) et (3) donnent les résultats attendus.

<sup>1</sup>On trouvera des détails historiques sur la démonstration de Descartes à l’adresse : <http://philosophie.ac-rouen.fr/archives/troiscercles.htm>

## 2. Inversion dans les configurations de Descartes

**2.1** On appelle inversion de centre  $O$  et de puissance  $k$  l'application qui à un point  $M$  du plan associe le point  $M'$  tel que  $M' \in (OM)$  et  $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ . Construire l'image d'un cercle de centre  $\Omega$ , de rayon  $r$  et ne passant pas par  $O$  par l'inversion de centre  $O$  et de puissance  $k$ .

**2.2** On considère le cercle  $\mathcal{C}$  passant par les points de tangence des trois cercles initiaux de la figure 3(a) et on note  $O$  et  $r$  le centre et le rayon de  $\mathcal{C}$ . On admet que les deux cercles en pointillés sur la figure 3(a) sont images l'un de l'autre par l'inversion de centre  $O$  et de puissance  $r^2$ . En déduire une méthode géométrique pour produire une infinité de configurations de Descartes contenues dans le plus grand cercle en pointillés dans la figure 3. Le résultat est appelé *pavage apollonien* (cf. fig. 4(a)).

## 3. Dimension fractale d'un empilement apollonien

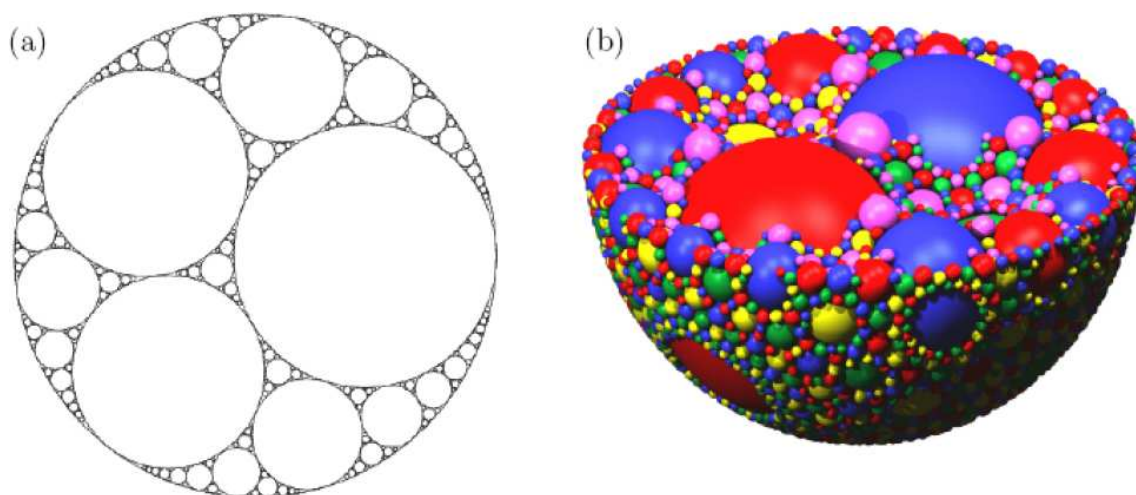


FIG. 4 – Empilements apolloniens (a) à deux dimensions et (b) à trois dimensions.

La figure 4 présente des exemples d'empilements apolloniens à deux et trois dimensions. Par construction, ces empilements ont une structure *autosimilaire* et peuvent être caractérisés par leur *dimension fractale*  $D_f$  “définie” en termes de loi d'échelle par

$$N_b(r) \sim \frac{1}{r^{D_f}} \text{ pour } r \rightarrow 0, \quad (4)$$

où  $N_b(r)$  est le plus petit nombre de boules (*i.e* de disques en dimension 2 et de sphères en dimension 3) de rayon  $r$  nécessaires pour couvrir l'empilement constitué par les grains de rayon  $r' \geq r$ . On trouve numériquement  $D_f \simeq 1.306$  pour l'empilement apollonien à 2D et  $D_f \simeq 2.474$  pour l'empilement apollonien à 3D.

**3.1** On introduit la densité de grains  $n(r)$  telle que  $n(r)dr$  correspond au nombre de grains de rayon  $r' \in [r, r+dr]$  dans l'empilement. Quelle est la loi d'échelle vérifiée par  $n(r)$  lorsque  $r$  tend vers 0 ?

- 3.2** Soit  $N(r)$  le nombre de grains de rayon  $r' \geq r$  dans l'empilement. Comment se comporte  $N$  lorsque  $r$  tend vers 0 ?
- 3.3** Donner le comportement asymptotique de la porosité  $1 - \phi(r)$  d'un empilement apollonien à 3D lorsqu'on fait tendre le rayon  $r$  des plus petits grains vers 0.
- 3.4** Donner aussi le comportement de la distribution des masses des grains  $m(r)$  d'un empilement apollonien à 3D pour les particules les plus "fines."
- 3.5** Les résultats numériques de la figure 5 sont-ils cohérents avec ce qui précède ? Quelle(s) critique(s) pouvez-vous porter sur ce graphe ?

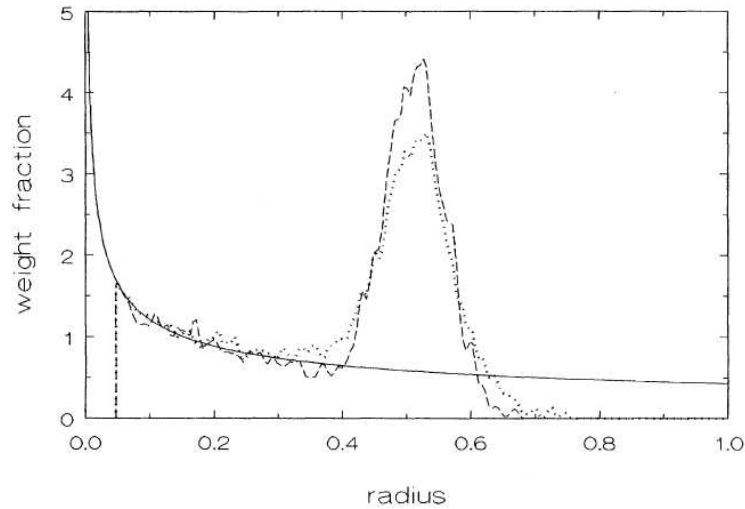


FIG. 5 – Distributions de masse  $m(r)$  en fonction de  $r$  calculées à partir d'un modèle numérique d'empilement fractal 3D où l'on remplit les interstices par des grains de plus en plus petits en partant d'une configuration initiale aléatoire donnée. Les pointillés correspondent à deux distributions initiales différentes. La ligne continue correspond à  $m(r) \sim r^{-0.45}$ . Figure extraite de S. V. Anishchik & N. N. Medvedev, "Three-dimensional Apollonian packing as a model for dense granular systems," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4314–4317 (1995).



## TD 3

### Compaction granulaire et modèle du parking

Lorsqu'un empilement granulaire initialement lâche est soumis à des vibrations mécaniques, on observe que sa compacité augmente au cours du temps. Une telle “compaction” revêt une importance industrielle particulière dans les applications qui nécessitent un bon contrôle de la compacité. Les recherches effectuées depuis une quinzaine d'années ont montré que la compaction granulaire implique des phénomènes d'hystérèse et de vieillissement ainsi que des fluctuations non-gaussiennes. En particulier, les données expérimentales montrent que la compacité évolue logarithmiquement en fonction du temps selon :

$$\rho_\infty - \rho(t) \sim \frac{\Delta\rho_\infty}{1 + B \ln(1 + t/\tau)}, \quad (1)$$

où  $\Delta\rho_\infty$ ,  $B$  et  $\tau$  sont des paramètres d'ajustement phénoménologiques qui ne dépendent que de l'accélération des vibrations. Cette dynamique lente est typique des systèmes en “vieillessement” (on dit aussi qu'il s'agit d'une “relaxation vitreuse”).

L'idée la plus naturelle pour expliquer l'état stationnaire atteint lors du phénomène de compaction granulaire est qu'il s'établit un équilibre entre les particules tombant dans des “trous” de l'empilement et la création de nouveaux “vides” sous l'effet des vibrations. Le problème de la compaction peut alors être vu comme un problème d'adsorption-désorption. On étudie ici un modèle simple à une dimension connu sous le nom de “modèle du parking” et introduit par le mathématicien hongrois Alfréd Rényi à la fin des années 1950.

#### I. Modèle du parking irréversible

On considère des sphères dures identiques qui s'adsorbent de façon irréversible sur une ligne avec un taux d'adsorption  $k$ . On prend comme unité de longueur le diamètre des particules et on part d'une ligne initialement vide. On note  $\rho(t)$  la densité linéique de particules à l'instant  $t$ . Dans la suite, on supposera  $k = 1$ , ce qui fixe l'unité de temps.

##### 1. Approche naïve

1.1 Montrer que l'équation d'évolution la plus naïve pour  $\rho(t)$  est :

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = 1 - \rho(t). \quad (2)$$

1.2 Que néglige-t-on dans l'équation précédente ?

## 2. Équation d'évolution pour $\rho(t)$

On introduit la densité linéique d'intervalles libres de taille  $x$  notée  $P(x, t)$ . En d'autres termes,  $P(x, t)dx$  représente le nombre d'intervalles libres de taille comprise entre  $x$  et  $x + dx$  par unité de longueur à l'instant  $t$ .

2.1 Montrer que  $P(x, t)$  satisfait à chaque instant la condition de normalisation :

$$\int_0^{\infty} (x + 1)P(x, t) dx = 1. \quad (3)$$

2.2 Quelle est la relation intégrale liant  $\rho(t)$  et  $P(x, t)$  ?

2.3 Montrer que l'équation d'évolution correcte pour  $\rho(t)$  s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \int_1^{\infty} (x - 1)P(x, t) dx. \quad (4)$$

2.4 Comment retrouve-t-on l'équation (2) à partir de l'équation (4) ?

## 3. Équation d'évolution pour $P(x, t)$ et solution pour $\rho(t)$

3.1 L'équation (4) montre qu'il est nécessaire de calculer  $P(x \geq 1, t)$  pour en déduire l'évolution de  $\rho(t)$ . En faisant un bilan des intervalles libres détruits et créés par l'adsorption de particules et en distinguant les cas  $x < 1$  et  $x \geq 1$ , montrer que l'évolution de  $P(x, t)$  est régie par :

$$\frac{dP}{dt}(x, t) = -(x - 1)H(x - 1)P(x, t) + 2 \int_{x+1}^{\infty} P(y, t) dy, \quad (5)$$

où  $H(x)$  est la fonction de Heaviside :  $H(x < 0) = 0$  et  $H(x \geq 0) = 1$ .

3.2 On s'intéresse désormais uniquement au cas  $x \geq 1$  et on cherche une solution de l'équation (5) sous la forme  $P(x, t) = F(t) \exp(-(x - 1)t)$ . Trouver l'équation différentielle vérifiée par  $F(t)$  et montrer que

$$F(t) = t^2 \exp\left(-2 \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du\right). \quad (6)$$

3.3 En déduire l'évolution suivante pour  $\rho(t)$  :

$$\rho(t) = \int_0^t \exp\left(-2 \int_0^{t'} \frac{1 - e^{-u}}{u} du\right) dt'. \quad (7)$$

#### 4. Étude du régime asymptotique $t \rightarrow \infty$

4.1 On admet que l'intégrale dans l'équation (7) converge vers une limite finie  $\rho_\infty \simeq 0.7475$  pour  $t \rightarrow \infty$ . On montre de plus que cette limite, obtenue ici pour une ligne initialement vide, dépend des conditions initiales. Pensez-vous alors qu'on puisse appliquer ce modèle de parking irréversible à la "compaction" le long d'une ligne ? Quel ingrédient manque-t-il au modèle ?

4.2 Montrer qu'aux temps longs l'approche vers la saturation suit la loi algébrique suivante :

$$\rho_\infty - \rho(t) \simeq \frac{e^{-2\gamma}}{t}, \quad (8)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler donnée par :

$$\gamma = - \int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx \simeq 0.5772. \quad (9)$$

4.3 Le comportement asymptotique du modèle irréversible est-il cohérent avec les mesures expérimentales ?

## II. Modèle du parking réversible

Le modèle du parking *réversible* consiste à envisager la possibilité pour une particule adsorbée de se "désorber" comme indiqué sur la figure 1. Le problème implique alors deux échelles de temps  $1/k_+$  et  $1/k_-$  où  $k_+$  et  $k_-$  sont respectivement les taux d'adsorption et de désorption. On choisit toujours comme unité de longueur le diamètre des particules.

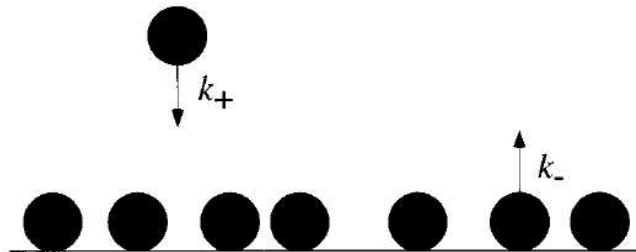


FIG. 1 – Modèle du parking réversible

1. Comment les résultats des questions I.1.1 à I.3.1 sont-ils modifiés dans le cadre du modèle réversible ? On montrera en particulier que l'équation d'évolution pour  $P(x, t)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}(x, t) = & -2k_-P(x, t) + 2k_+ \int_{x+1}^\infty P(y, t) \, dy \\ & + H(x-1) \left[ \frac{k_-}{\rho(t)} \int_0^{x-1} P(y, t)P(x-1-y, t) \, dy - k_+(x-1)P(x, t) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

et on donnera une interprétation des termes liés à la désorption.

## 2. Solution indépendante du temps

- 2.1** On cherche une solution stationnaire de l'équation (10) sous la forme d'une distribution de Poisson  $P_\infty(x) = \beta e^{-\alpha x}$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . À quelle condition liant  $\alpha$  et  $\kappa = k_+/k_-$ ,  $P_\infty(x)$  est-elle solution ? On raisonnera sur le cas  $x < 1$  et on admettra que la distribution trouvée reste solution pour  $x > 1$ .
- 2.2** Exprimer alors  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  en utilisant la condition de normalisation trouvée en I.2.1.
- 2.3** Grâce à la question I.2.2, exprimer enfin la densité de particules dans l'état stationnaire  $\rho_\infty$  en fonction de  $\alpha$ .
- 2.4** Montrer que  $\rho_\infty \sim \kappa$  pour  $\kappa \ll 1$  et que  $\rho_\infty \sim 1 - 1/\ln \kappa$  pour  $\kappa \gg 1$ . Interpréter physiquement ces deux limites. Laquelle est pertinente pour le problème de la compaction granulaire ?
- 2.5** En comparant au résultat de I.4, montrer que la limite  $\kappa \gg 1$  du cas réversible *ne* correspond *pas* au cas irréversible ( $k_- = 0$ ).

## 3. Approche de “champ moyen” pour la dynamique

- 3.1** Une façon simple d'appréhender la dynamique du modèle réversible est d'injecter dans l'équation d'évolution pour  $\rho(t)$  la solution stationnaire trouvée précédemment pour  $P(x, t)$  et de remplacer  $\rho_\infty$  par  $\rho(t)$ . Montrer que l'équation d'évolution obtenue s'écrit alors :

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = k_+(1 - \rho) e^{-\frac{\rho}{1-\rho}} - k_- \rho. \quad (11)$$

- 3.2** Dans le régime contrôlé par la désorption, une deuxième approximation consiste à passer à la limite  $k_- \rightarrow 0$  dans l'équation précédente. En posant  $\alpha(t) = \rho(t)/(1 - \rho(t))$ , montrer que l'équation (11) devient :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = k_+(1 + \alpha) e^{-\alpha}. \quad (12)$$

- 3.3** Montrer que  $\alpha(t) \sim \ln(k_+ t)$  pour  $t \rightarrow \infty$ . En déduire le comportement asymptotique de  $\rho_\infty - \rho(t)$  et discuter ce comportement au vu des observations expérimentales rappelées en introduction.

## TD 4

### Théorie cinétique et démon de Maxwell granulaire

On se propose de décrire un ensemble dilué de  $N$  grains identiques (masse  $m$ , rayon  $a$ ) soumis à une forte agitation. Les grains sont placés dans une boîte parallélépipédique de section carrée de côté  $L$  et dont on supposera la hauteur infinie (cf. fig. 1(a)). Les parois de la boîte sont parfaitement élastiques i.e. le coefficient de restitution d'une bille entrant en collision avec une paroi vaut 1. Cette boîte est vibrée verticalement très rapidement, ce qui permet l'agitation permanente des grains. On suppose le milieu suffisamment dilué pour ne prendre en compte que les collisions binaires entre grains. Ces collisions sont caractérisées par le coefficient de restitution  $e$ . Enfin, on néglige les frottements.

Le but du TD est de comprendre un phénomène a priori contre-intuitif qui apparaît dans un tel “gaz granulaire” et connu sous le nom de démon de Maxwell granulaire : dans certaines conditions, lorsqu'un récipient constitué de deux compartiments mis en communication par un petit trou est vibré verticalement, on observe que les grains s'accumulent dans l'un des deux compartiments (cf. fig. 1(b)).

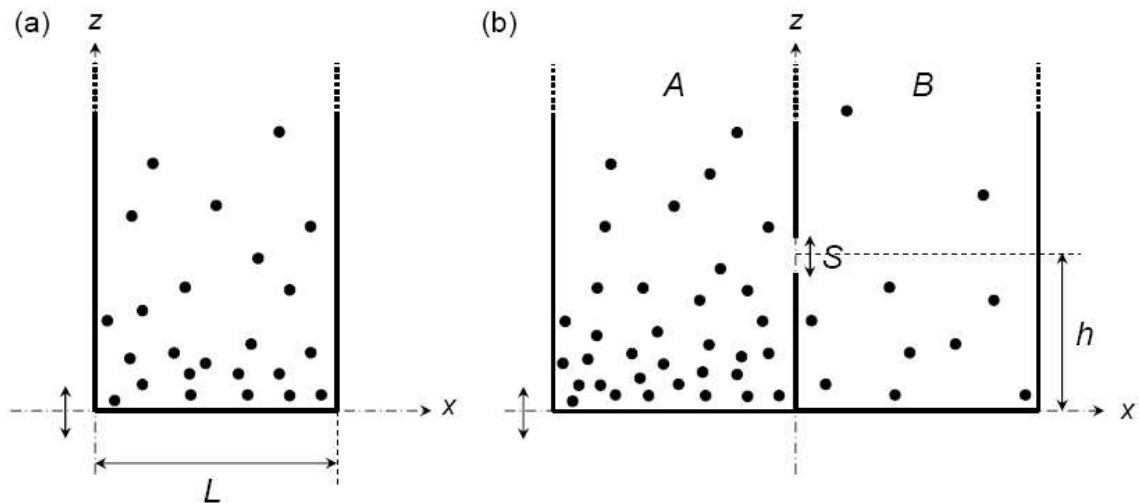


FIG. 1 – (a) Gaz granulaire. (b) Démon de Maxwell.

## I. Profils de pression et de densité dans un gaz granulaire

On suppose que le “gaz granulaire” décrit dans la figure 1(a) a atteint un régime stationnaire. Comme dans la théorie cinétique classique des gaz, on introduit la fonction de distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  telle que le nombre de grains situés dans un volume  $d\tau = dx dy dz$  autour de  $\mathbf{r}$  et ayant une vitesse dans un “volume”  $d\tau_u = du_x du_y du_z$  autour de  $\mathbf{u}$  soit  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\tau d\tau_u$ . On définit de plus la *densité volumique locale* de grains par :

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\tau_u. \quad (1)$$

1. On admet que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  ne dépend en fait que de la hauteur  $z$  et de la norme  $u$  du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  et peut être notée  $f(z, u)$ . À quelle(s) condition(s) cela vous paraît-il raisonnable ?
2. Calculer le nombre de grains entrant en collision entre  $t$  et  $t + dt$  avec un élément de surface  $dS$  autour du point  $M(x = -L/2, y, z)$  sur la paroi verticale située en  $x = -L/2$ . En déduire la quantité de mouvement reçue par  $dS$  entre  $t$  et  $t + dt$ .
3. On introduit la “température granulaire”  $T_g(z)$  définie par :

$$T_g(z) = \frac{\langle u^2 \rangle}{3}. \quad (2)$$

Justifier cette définition et déduire de la question précédente la pression  $p(z)$  exercée par les grains sur la paroi en  $M$  en fonction de  $m$ ,  $n(z)$  et  $T_g(z)$ . Quelle loi connue retrouve-t-on ?

4. On prend désormais en compte la gravité. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une tranche de gaz granulaire comprise entre  $z$  et  $z + dz$ . Quelle loi connue retrouve-t-on ?
5. Montrer qu’il existe des solutions  $n(z)$  et  $p(z)$  correspondant à une température homogène  $T_g(z) = T$ . Que vaut la pression en  $z = 0$  en fonction de  $N$ ,  $m$ ,  $g$  et  $L$  ?

## II. Bilan d’énergie dans un milieu granulaire vibré

On considère le “gaz granulaire” précédent en régime stationnaire et on suppose la température granulaire homogène et égale à  $T$ . On cherche à exprimer  $T$  grâce à un bilan d’énergie sans toutefois expliciter la forme exacte de la fonction de distribution  $f(z, u)$ .

## 1. Dissipation d'énergie

- 1.1** Rappeler l'expression de l'énergie dissipée lors d'une collision entre deux grains de vitesse relative d'impact  $\mathbf{v}$ .
- 1.2** On rappelle que le libre parcours moyen  $l$  est lié à la densité volumique de particules  $n$  par  $l \sim 1/(na^2)$ . En déduire le temps moyen entre deux collisions.
- 1.3** Montrer que l'énergie dissipée à une hauteur  $z$  par unité de temps et par unité de volume est :

$$\gamma(z) = Cma^2(1 - e^2)n^2(z)T^{3/2}, \quad (3)$$

où  $C$  est une constante sans dimension qu'on ne cherchera pas à expliciter.

- 1.4** En déduire l'énergie dissipée  $\Gamma$  dans tout le récipient par unité de temps.

## 2. Injection d'énergie

- 2.1** On suppose que le fond du récipient suit un mouvement en dents de scie d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f$ . Que vaut la vitesse du fond  $v_f$  ?
- 2.2** On suppose de plus que l'amplitude  $A$  des vibrations est négligeable devant le libre parcours moyen de sorte que le fond peut être considéré comme stationnaire. Lorsqu'un grain entre en collision avec le fond avec une vitesse verticale  $u_z$ , que vaut la vitesse verticale  $u'_z$  après le choc ? Quel est le gain d'énergie cinétique correspondant ?
- 2.3** Montrer que l'énergie injectée par le fond par unité de temps vaut :

$$Q = mL^2 n(0) (C'v_f T + C''v_f^2 T^{1/2}), \quad (4)$$

où les constantes  $C'$  et  $C''$  dépendent de la forme exacte de la fonction de distribution  $f(z, u)$ . Dans la suite, on négligera le dernier terme dans cette équation.

- 2.4** À quelles conditions sur  $A$  peut-on appliquer ce qui précède ?

- 3. Température du gaz.** En égalant le taux d'énergie dissipée et le taux d'énergie injectée, montrer que la température du gaz en régime stationnaire s'écrit :

$$T = \left( \frac{2C'v_f L^2}{Ca^2(1 - e^2)N} \right)^2. \quad (5)$$

En déduire un ordre de grandeur pour la vitesse typique des particules du gaz. Les conditions de la question 2.4 sont-elles vérifiées ?

### III. Démon de Maxwell

On considère maintenant deux récipients identiques  $A$  et  $B$  collés selon une paroi commune en  $x = 0$  et contenant en tout  $N_0$  grains (cf. fig. 1(b)). Les deux récipients vibrent verticalement avec la même vitesse  $v_f$ . Un petit trou de surface  $S$  est percé dans la paroi commune en  $z = h$  de sorte que les récipients peuvent échanger des grains. On notera  $N_A(t)$  et  $N_B(t)$  le nombre de grains dans chaque récipient en fonction du temps et  $T_A(t)$  et  $T_B(t)$  les températures granulaires supposées homogènes. Enfin, on suppose que les solutions trouvées en I et II restent valables au cours du temps dans les deux récipients (*hypothèse quasi-stationnaire*).

#### 1. Approche heuristique

On part de la situation d'équipartition  $N_A = N_B$  et on suppose que le nombre de grains dans le récipient  $A$  augmente. Comment varie alors la température  $T_A$ ? Comment varie alors la probabilité pour qu'un grain passe de  $B$  vers  $A$ ? Expliquer pourquoi on peut arriver à un état final où presque tous les grains sont rassemblés du même côté. Ce phénomène constitue un nouvel exemple d'effondrement inélastique. Si les grains étaient des molécules d'un gaz parfait, quelle loi de la thermodynamique serait violée? Justifier l'appellation de "démon de Maxwell granulaire."

#### 2. Mise en évidence théorique d'une bifurcation

**2.1** Calculer le flux de grains  $F_A$  du récipient  $A$  vers  $B$  à travers  $S$  en fonction de  $T_A$ ,  $n_A(h)$  et  $S$ . En déduire le flux de grains  $F_B$  de  $B$  vers  $A$ .

**2.2** On définit l'asymétrie du système par :

$$\alpha(t) = \frac{N_A(t) - N_B(t)}{N_0}. \quad (6)$$

Montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d\alpha}{dt} = C_1 \left( (1 - \alpha)^2 e^{-C_2(1-\alpha)^2} - (1 + \alpha)^2 e^{-C_2(1+\alpha)^2} \right), \quad (7)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données du problème.

**2.3** Étudier la stabilité de la solution d'équipartition  $N_A = N_B$ . Pour cela, on supposera  $\alpha \ll 1$  et on cherchera une condition sur  $C_2$  pour que la solution  $\alpha = 0$  soit linéairement stable.

**2.4** Déterminer les valeurs d'équilibre stable au voisinage du seuil d'instabilité noté  $C_2^*$ .



### 3. Comparaison aux expériences

**3.1** D'après les résultats théoriques précédents, sur quels paramètres faut-il jouer pour favoriser le regroupement de tous les grains d'un seul côté ?

**3.2** La figure 2 présente des mesures expérimentales de la fraction de grains dans chaque récipient  $n_k = N_k/N_0$  (avec  $k = A$  ou  $B$ ) en fonction d'un paramètre d'ordre noté  $B$  et donné par :

$$B = 4\pi g a^2 (1 - e)^2 \frac{h}{(Af)^2} \left( \frac{N_0}{4L} \right)^2. \quad (8)$$

L'expression de  $B$  ci-dessus donnée par les auteurs vous paraît-elle compatible avec les résultats obtenus en III.2 ? Discuter le diagramme de bifurcation obtenu.

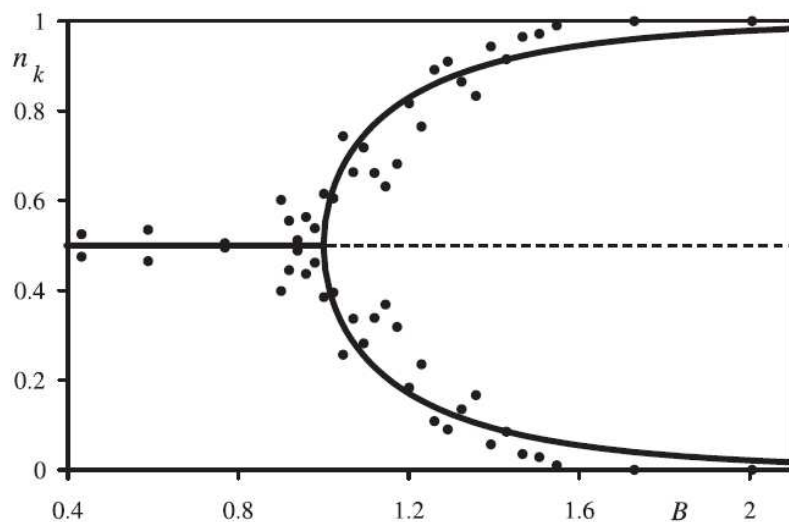


FIG. 2 – Diagramme de bifurcation extrait de van der Weele *et al.*, “Hysteretic clustering in granular gas,” *Europhys. Lett.* **53**, 328–334 (2001).

## TD 5

### Écoulement de grains le long d’un plan incliné

L’écoulement de grains le long d’un plan incliné d’un angle  $\alpha$  avec l’horizontale revêt une importance particulière en géophysique (avalanches, éboulements de terrain, etc.). Dans le régime des faibles vitesses (régime dense), le milieu granulaire s’apparente à un fluide de densité constante  $\rho$ . Ce TD propose d’examiner deux approches hydrodynamiques différentes pour modéliser cet écoulement dense schématisé sur la figure 1. Dans tous les cas, on considérera les grains comme un milieu continu et l’écoulement sera supposé indépendant de la coordonnée  $y$ .

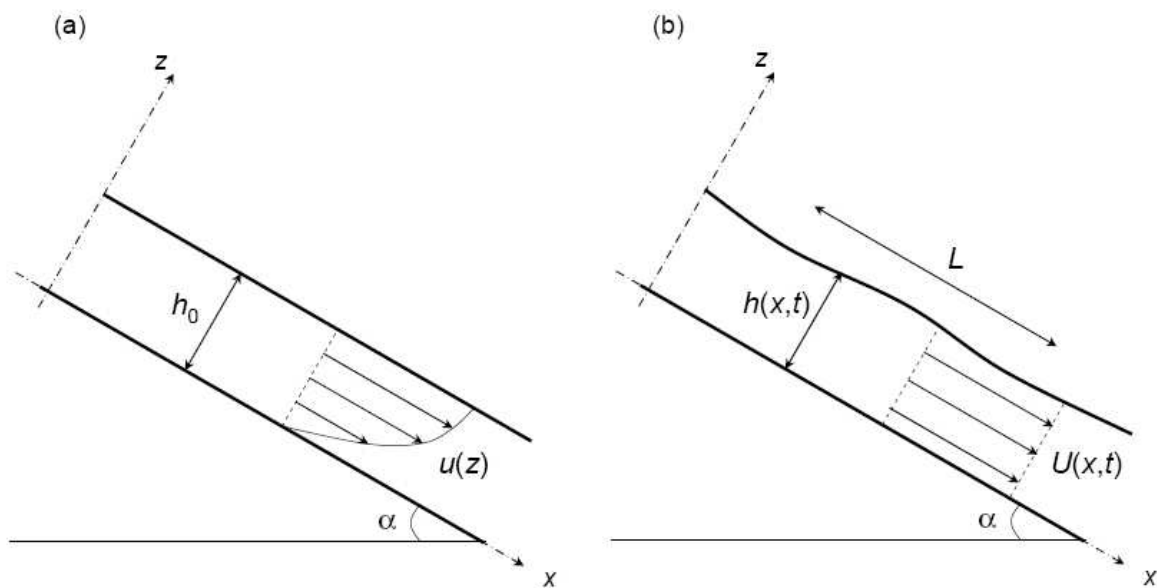


FIG. 1 – Écoulement de grains le long d’un plan incliné. (a) Profil de vitesse cisailé. (b) Profil de vitesse “bouchon.”

## I. Approche de type “fluide complexe”

Dans cette partie, on suppose que le milieu granulaire se comporte comme un fluide cisailé et que le plan incliné est rugueux de sorte que la vitesse à la paroi est nulle (cf. fig. 1(a)). On suppose d’abord que l’écoulement est stationnaire et indépendant de  $x$  et que l’épaisseur  $h_0$  est homogène. On note respectivement  $u(z)$  et  $p(z)$  la vitesse selon  $x$  et la pression. On admet enfin que la dynamique des grains de rayon  $a$  obéit à :

$$\nu a^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{du(z)}{dz} \right)^2 + g \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp(z)}{dz} + g \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

1. Pouvez-vous justifier les équations précédentes ? À quelle loi de comportement rhéologique l’équation (1) correspond-elle ? Quelle est la dimension du coefficient  $\nu$  ?
2. Déterminer le champ de vitesse  $u(z)$ . En déduire la vitesse maximale  $u_{max}$  en fonction de  $a$ ,  $g$ ,  $h_0$ ,  $\nu$  et  $\alpha$ .
3. La figure 2 présente des mesures de  $u_{max}$  obtenues avec deux types de grains. Commenter ces résultats expérimentaux en fonction du résultat précédent.

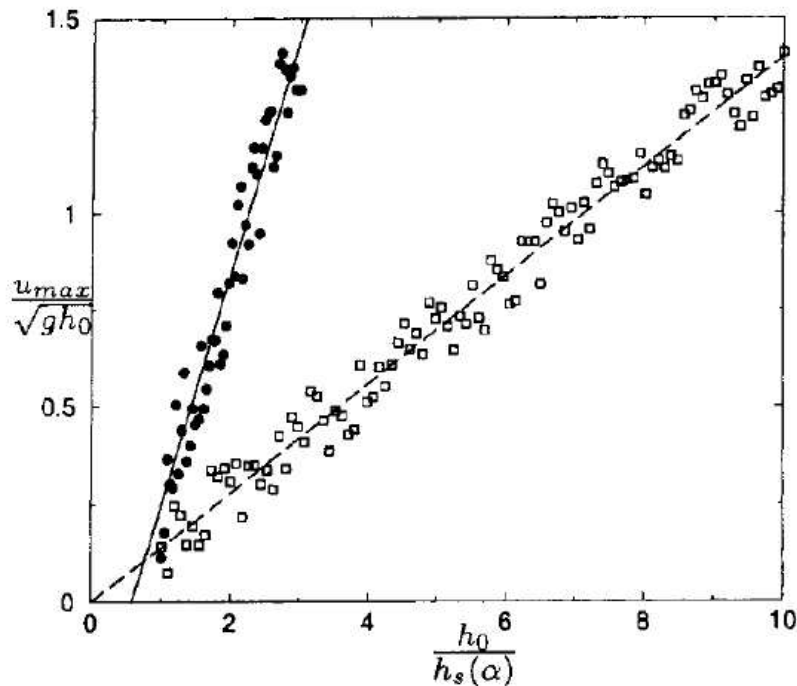


FIG. 2 –  $u_{max}$  mesuré avec des grains de sable (●) et des billes de verre (□) pour différentes épaisseurs  $h_0$ . Pour un système donné, le coefficient de normalisation  $h_s(\alpha)$  permet de juxtaposer les mesures pour les différentes valeurs de l’angle d’inclinaison  $\alpha$ .

4. On s'intéresse maintenant à une petite oscillation de la surface autour de l'épaisseur  $h_0$  et on écrit la perturbation sous la forme d'une onde progressive en notations complexes  $h(x, t) = h_0 + \tilde{h}e^{i(kx - \omega t)}$  où  $\tilde{h} \ll h_0$ . On suppose que l'équation d'évolution de la surface est celle d'un film liquide classique de viscosité cinématique  $\nu_0$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{gh^2 \sin \alpha}{\nu_0} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

- 4.1 Que vaut la viscosité effective  $\nu_0$  du milieu granulaire ? Quelle propriété d'une interface liquide néglige-t-on dans l'équation (3) ? Pourquoi ?
- 4.2 Dédurre de l'équation (3) la relation de dispersion liant  $k$ ,  $\omega$  et  $u_{max}$ .
- 4.3 Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des oscillations en fonction de  $a$ ,  $g$ ,  $h_0$ ,  $\nu$  et  $\alpha$ .

## II. Approche de type Saint Venant

On suppose maintenant que l'on peut assimiler le milieu granulaire à un solide qui glisse sur le fond à la vitesse  $U$ . Le profil de vitesse est alors un profil "bouchon" comme indiqué sur la figure 1(b). À des facteurs numériques près, cette hypothèse revient à raisonner sur la vitesse *moyennée selon l'épaisseur*. Les équations obtenues sont alors appelées équations de Saint Venant. On suppose que l'épaisseur  $h(x, t)$  et la vitesse  $U(x, t)$  varient lentement et faiblement autour de leurs valeurs moyennes sur une échelle de taille caractéristique  $L$ .

### 1. Hypothèse de couche mince

- 1.1 Rappeler les équations générales régissant le mouvement d'un milieu continu fluide et incompressible. Pourquoi l'hypothèse d'incompressibilité est-elle raisonnable ?
- 1.2 À quelle condition peut-on considérer que le milieu granulaire est une "couche mince" ?
- 1.3 Montrer que dans l'hypothèse de couche mince, la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  selon  $z$  est donnée par l'équilibre hydrostatique. Cette conséquence de l'hypothèse de couche mince est connue sous le nom d'*hypothèse de lubrification*. Dans la suite, on supposera l'égalité des contraintes normales selon  $x$  et selon  $z$  :  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$ .

### 2. Équations de Saint Venant

- 2.1 En raisonnant sur une petite tranche de matériau de longueur  $dx$  et sur un intervalle de temps  $dt$ , montrer que les équations de conservation de la matière et de la quantité de mouvement s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial hU^2}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \sum \frac{dF}{dx}, \quad (5)$$

où  $\sum dF$  représente les forces extérieures s'exerçant selon la direction ( $Ox$ ) sur la tranche considérée par unité de longueur dans la direction transverse ( $Oy$ ).

**2.2** Montrer que :

$$\frac{\sum dF}{dx} = \rho gh \left( \sin \alpha - \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \tau, \quad (6)$$

où  $\tau$  désigne la contrainte de cisaillement s'exerçant à l'interface entre la couche de grains et le fond.

**3. Loi de friction.** L'approche précédente permet de s'affranchir de la description précise du comportement rhéologique dans le volume du matériau. Toutefois, la rhéologie se trouve désormais cachée dans le terme d'interface  $\tau$  de l'équation précédente. On propose ici de modéliser ce terme par une loi de friction  $\tau = \mu \sigma_{zz}(z = 0)$  où le coefficient de friction  $\mu$  ne dépend que du taux de cisaillement moyen  $U/h$  selon  $\mu(U, h) = f(U/h)$  avec :

$$f(0) = \tan \delta_s \quad \text{et} \quad f(\Gamma_0) = \tan \delta_d, \quad (7)$$

$$f'(x) < 0 \text{ pour } 0 < x < \Gamma_0 \quad \text{et} \quad f'(x) > 0 \text{ pour } x > \Gamma_0, \quad (8)$$

où  $\delta_s$ ,  $\delta_d$  et  $\Gamma_0$  sont des constantes. Tracer l'allure de  $\mu$  en fonction de  $U/h$ .

**4. Écoulement stationnaire uniforme.** On cherche d'abord une solution indépendante du temps et de l'espace :  $h(x, t) = h_0$  et  $U(x, t) = U_0$ . Quelle équation relie  $h_0$  et  $U_0$ ? Sachant que le débit  $Q = h_0 U_0$  est fixé de l'extérieur indépendamment de l'angle  $\alpha$ , discuter le nombre de solutions stationnaires uniformes possibles selon l'inclinaison du plan.

## 5. Stabilité des solutions uniformes

**5.1** On considère une solution uniforme dépendant du temps selon  $U(t) = U_0 + \tilde{U}(t)$  où  $U_0$  est une solution stationnaire uniforme et  $\tilde{U} \ll U_0$ . Montrer que  $\tilde{U}(t) = \tilde{U}_0 \exp(\sigma t)$  et exprimer le taux de croissance  $\sigma$  en fonction des données du problème.

**5.2** En déduire qu'on ne peut pas observer d'écoulement stationnaire uniforme avec  $U_0/h_0 < \Gamma_0$ .

**5.3** Une couche de grains d'épaisseur uniforme  $h_0$  est au repos sur un plan initialement horizontal. On incline très lentement le plan jusqu'à un angle  $\alpha > \delta_s$  puis on redescend le plan jusqu'à l'horizontale. On suppose que l'épaisseur reste constante. Décrire les phénomènes attendus lors de cette expérience. Tracer l'évolution de la vitesse de la couche en fonction de l'angle d'inclinaison.

## TD 6

### Écoulement de fluides non-newtoniens

Nous nous intéressons dans ce TD aux écoulements à surface libre de fluides visqueux incompressibles sur un plan incliné. L'écoulement est supposé parallèle et stationnaire. Comme dans le TD précédent, l'épaisseur du film fluide est notée  $h$  et le plan est incliné d'un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (cf. figure 1). On note  $g$  l'accélération de la pesanteur. On suppose enfin que le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v_x(x, y) \vec{e}_x .$$

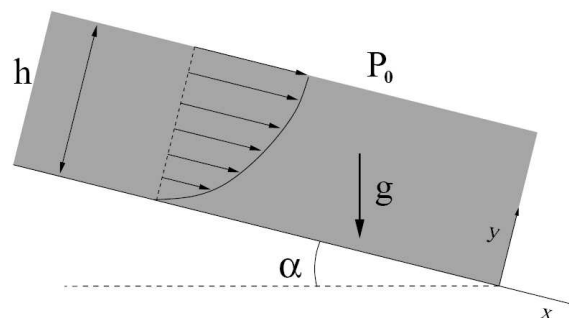


FIG. 1 – Notations.

#### I. Quelques éléments de rhéologie

1. On rappelle l'expression de la force de frottement qu'exerce une tranche de fluide de surface  $S$  sur la tranche située immédiatement en dessous :

$$F = \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} .$$

Comment s'appelle le coefficient  $\eta$  et quelle est sa dimension ? On appelle *contrainte de cisaillement* la grandeur définie par :  $\sigma = F/S$ ,

et *taux de cisaillement* la grandeur définie par :  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ . Donner les dimensions de  $\sigma$  et  $\dot{\gamma}$ . Quelle est la relation liant  $\sigma$  et  $\dot{\gamma}$  ?

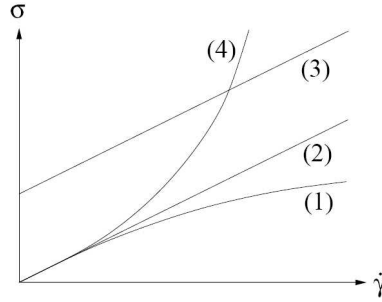


FIG. 2 – Exemples de courbes d'écoulement  $\sigma$  vs.  $\dot{\gamma}$ .

- De façon générale, pour un fluide visqueux non-newtonien,  $\eta$  n'est pas constante mais peut dépendre du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  qui est a priori une fonction de  $y$ . A l'aide d'un "rhéomètre," il est possible d'imposer une contrainte à un fluide et de mesurer le taux de cisaillement induit (ou vice-versa). On trace alors  $\sigma$  en fonction de  $\dot{\gamma}$ . Le graphe correspondant s'appelle la *courbe d'écoulement* (ou "relation constitutive") du fluide. La figure 2 présente des courbes d'écoulement typiques correspondant à quatre fluides différents.

Représenter graphiquement l'allure des courbes  $\eta$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  pour les quatre fluides.

- Ces quatre fluides sont qualifiés de fluides newtonien, à seuil, rhéo-épaississant et rhéo-fluidifiant. A l'aide des courbes  $\eta(\dot{\gamma})$ , identifier chacun des fluides en justifiant votre choix. Citer des exemples de la vie courante de fluides à seuil, rhéo-épaississant ou rhéo-fluidifiant ?
- En utilisant le fait que le fluide est incompressible, montrer que le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x,$$

c'est-à-dire que  $v_x$  ne dépend pas de  $x$ .

- En faisant un bilan des forces qui s'exercent sur une petite tranche de fluide parallèle au plan incliné et d'épaisseur  $dy$ , montrer que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit :

$$\vec{f} = \frac{\partial}{\partial y} (\eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}) \vec{e}_x .$$

En déduire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide complexe.

- On admettra que les conditions aux limites usuelles à la paroi et à la surface libre restent valables pour tous les fluides :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(y=0) = 0, \\ \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y=h) = 0. \end{array} \right.$$

Justifier ces conditions aux limites.

- On projetant l'équation de Navier-Stokes sur l'axe  $(Oy)$  établir l'expression de la pression  $P$ . En déduire le gradient de pression  $\partial P / \partial x$ .

8. En projetant l'équation de Navier-Stokes sur l'axe ( $Ox$ ), montrer que :

$$\eta(\dot{\gamma}(y)) \dot{\gamma}(y) = a (b - y),$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes que l'on explicitera.

9. En déduire que, si l'on néglige la pression atmosphérique  $P_0$ , l'équation de Navier-Stokes sur l'axe ( $Ox$ ) se ramène à :

$$\sigma = \tan \alpha P(y). \quad (*)$$

10. On se donne les expressions suivantes pour les fluides (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} (1) & \sigma = \kappa \dot{\gamma}^{1/2}, \\ (2) & \sigma = \eta_0 \dot{\gamma}, \\ (3) & \sigma = \sigma_0 + \eta_0 \dot{\gamma}. \end{cases}$$

Ecrire l'équation (\*) pour chacun des fluides. Résoudre ces équations pour les fluides (1) et (2) et en déduire les profils de vitesse correspondants.

11. Calculer le débit volumique  $Q_1$  (respectivement  $Q_2$ ) associé au fluide (1) (respectivement (2)). A quelle condition le débit  $Q_1$  est-il supérieur à  $Q_2$ ? Interpréter.
12. A quelle condition sur  $h$  et  $\alpha$  le fluide (3) peut-il s'écouler ?
13. Lorsque cette condition est satisfaite, on observe le profil de vitesse schématisé ci-dessous : une couche superficielle avance en bloc sur une couche basale cisailée. Commenter ce profil. Calculer l'épaisseur de la couche superficielle  $\Delta$ .

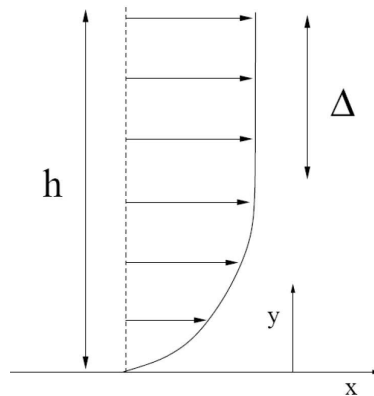


FIG. 3 – Profil de vitesse dans le fluide (3).



## II. Rhéologie du sable

Nous allons maintenant nous intéresser à un fluide complexe particulier : le sable. Le sable sera considéré comme incompressible. Récemment, O. Pouliquen et al. ont proposé une loi rhéologique pour le sable à partir de résultats expérimentaux (*Nature* **441**, 728–730 (2006)). Ils ont d'abord établi de façon empirique une expression du coefficient de frottement  $\mu$  en fonction d'un unique nombre sans dimension  $I$  :

$$I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}},$$

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1},$$

où  $d$  est le diamètre des grains,  $\rho$  leur densité et  $\mu_s$ ,  $\mu_2$  et  $I_0$  des paramètres phénoménologiques. Ils ont ensuite proposé d'écrire :

$$\eta(\dot{\gamma}, P) = \frac{\mu(I) P}{\dot{\gamma}}.$$

1. Donner les comportements asymptotiques de  $\eta$  lorsque  $\dot{\gamma}$  tend vers 0 et vers  $+\infty$ .  
Le sable est-il rhéo-épaississant ? rhéo-fluidifiant ? un fluide à seuil ?
2. A l'aide de l'équation (\*), montrer que :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\tan \alpha - \mu_s}{\mu_2 - \tan \alpha}. \quad (**)$$

3. Quel est le signe de  $I/I_0$  ?
4. Dédurre de (\*\*) l'expression de  $\dot{\gamma}$ .
5. Montrer que l'on retrouve le profil de vitesse de Bagnold.
6. Exprimer la vitesse du sable au niveau de la surface libre.

## TD 7

### Formation des rides sous-marines

Lorsqu'une couche de grains initialement plane est soumise à l'influence d'un écoulement, on observe la formation de rides avec une longueur d'onde bien déterminée. Le but de ce TD est d'étudier le mécanisme d'instabilité conduisant à la formation de ces rides et de prévoir la longueur d'onde sélectionnée grâce à un modèle à deux dimensions.

#### I. Approche qualitative

L'effet principal de l'écoulement est d'éroder le lit granulaire. Une quantité centrale au problème de la formation des rides est donc le *flux* de grains transportés par l'écoulement. On considère que l'interface entre le lit de grains et le fluide est bien définie et on suppose qu'au voisinage d'une déformation, le flux de grains présente un maximum.

1. Pourquoi y a-t-il érosion du lit de grains lorsque le flux augmente et déposition de grains lorsque le flux diminue ?
2. En vous aidant de la figure 1, justifier le fait qu'une déformation puisse croître ou disparaître selon la position relative du maximum du flux et du sommet de la déformation.

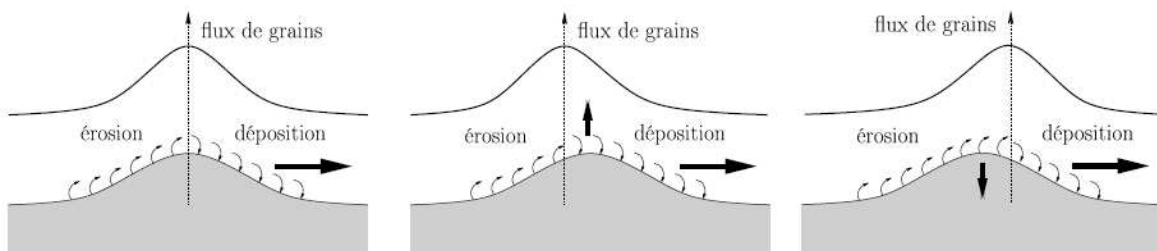


FIG. 1 – Mécanisme physique à l'origine de la croissance ou de la disparition d'une déformation. Figure extraite de V. Langlois, “Instabilité d'un lit granulaire cisailé par un écoulement fluide,” Thèse de Doctorat de l'Université Rennes 1 (2005).

## II. Transport de grains par un écoulement

Le lit granulaire est constitué de grains de diamètre  $d$  et de densité  $\rho_p$ . On note  $s = \rho_p/\rho$  le rapport des densités des grains et du fluide. Intuitivement, il est clair que l'écoulement peut transporter des grains à condition que la contrainte de cisaillement qui s'applique sur les grains soit "suffisamment grande."

1. En se plaçant du point de vue d'un grain individuel situé en surface du lit et soumis à l'action d'une contrainte de cisaillement  $\sigma$ , montrer que ce grain peut se déplacer à condition que le nombre sans dimension défini par :

$$\Theta = \frac{\sigma}{\rho g (s - 1) d}, \quad (1)$$

soit suffisamment grand.  $\Theta$  est appelé le *nombre de Shields*.

2. Les expériences montrent qu'une fois l'équilibre atteint, le flux de grains  $q_{eq}$  à travers une section verticale est donné par :

$$q_{eq} = q_b (\Theta - \Theta_c)^n, \quad (2)$$

avec  $q_b \sim \sqrt{gd^3}$ ,  $\Theta_c = 0.05-0.35$  et  $n = 1.5-3$ . À votre avis, de quels paramètres dépendent  $n$  et  $\Theta_c$  ?

3. On traite désormais le milieu granulaire comme un milieu continu et on note  $q(x, t)$  le flux de grains à travers une section verticale située en  $x$ . Montrer que la conservation de la matière impose :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (3)$$

## III. Modélisation de l'écoulement du fluide

L'approche la plus simple consiste à considérer un lit de grains soumis à un écoulement de cisaillement plan et à examiner l'influence d'une déformation  $h(x, t)$  du lit de grains sur le champ de vitesse (cf. figure 2). Dans ce modèle à deux dimensions, on note  $\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$  le champ de vitesse et  $\eta$  et  $\rho$  la viscosité et la densité du fluide supposé incompressible. On suppose enfin  $u = \dot{\gamma}L$  et  $v = 0$  à la surface du fluide située en  $z = L$ .

1. Rappeler les équations gouvernant le mouvement du fluide.
2. Montrer qu'en  $z = h(x, t)$ , on a :

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u. \quad (4)$$

3. On suppose de plus une condition de non-glissement à l'interface. En déduire que pour  $z = h(x, t)$  :

$$u + \frac{\partial h}{\partial x} v = 0. \quad (5)$$

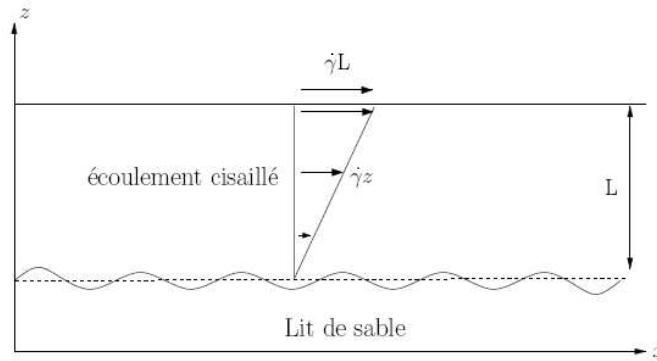


FIG. 2 – Lit de grains soumis à un écoulement cisaillé.

4. Expérimentalement, la vitesse caractéristique des rides est de l'ordre de 1 cm/min et leur longueur d'onde typique est d'une dizaine de centimètres. D'autre part, la vitesse du fluide à quelques centimètres du lit granulaire est de l'ordre de 10 cm/s. En déduire que l'on peut considérer que l'écoulement s'adapte de façon instantanée à une modification du relief ("séparation des échelles de temps"). Comment les équations et les conditions aux limites précédentes sont-elles modifiées dans cette hypothèse d'*écoulement quasi-stationnaire*?
5. À quelles conditions la situation de la figure 2 modélise-t-elle correctement l'expérience dans un tube vue en cours? Retrouver les ordres de grandeur pour l'écoulement à partir d'une estimation du débit d'eau dans le tube.

#### IV. Analyse de stabilité linéaire

1. **État de base.** On suppose le lit de grains horizontal ( $h_0 = 0$ ). Calculer le champ de vitesse  $(u_0, v_0)$  et le champ de pression  $P_0$  correspondants. Exprimer le flux de grains  $q_0$  en fonction de  $\dot{\gamma}$  et des autres paramètres du problème. Dans la suite, on supposera toujours  $\Theta \gtrsim \Theta_c$ .
2. **Linéarisation des équations pour le fluide.** On s'intéresse à une petite perturbation du relief du lit granulaire sous la forme  $h(x, t) = h_1 e^{ikx + \omega t}$  où  $k$  est le nombre d'onde et  $\omega$  un nombre complexe. Le but de l'*analyse de stabilité linéaire* est de calculer la relation de dispersion  $\omega(k)$  et d'en déduire la stabilité de la perturbation. On écrit donc les champs hydrodynamiques sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u(x, z, t) \\ v(x, z, t) \\ P(x, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ P_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(z) \\ v_1(z) \\ P_1(z) \end{pmatrix} e^{ikx + \omega t}. \quad (6)$$

En considérant uniquement le premier ordre en perturbation, quelles sont les équations et les conditions aux limites vérifiées par  $u_1$ ,  $v_1$  et  $P_1$  dans l'hypothèse quasi-stationnaire? À quelle condition sur  $\omega$  cette hypothèse est-elle justifiée?

- 3. Solution pour la vorticité.** On introduit la vorticité  $\Omega = \partial_x v - \partial_z u$  et on écrit au premier ordre en perturbation  $\Omega(x, z, t) = \Omega_0 + \Omega_1(z)e^{ikx+\omega t}$ . Que vaut  $\Omega_0$ ? Exprimer  $\Omega_1$  en fonction de  $u_1$  et  $v_1$ . Déduire de la question précédente que  $\Omega_1$  est solution de :

$$\frac{d^2\Omega_1}{dz^2} - k^2\Omega_1 = \frac{ik\rho\dot{\gamma}}{\eta} z\Omega_1. \quad (7)$$

Vérifier que la solution de cette équation différentielle s'écrit  $\Omega_1(z) = C_1\text{Ai}(Z) + C_2\text{Bi}(Z)$  avec  $Z = e^{i\pi/6}(kz - i\beta^2)/\beta^{2/3}$  et  $\beta = k\sqrt{\eta/\rho\dot{\gamma}}$ , où  $\text{Ai}(Z)$  et  $\text{Bi}(Z)$  sont les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation  $f''(Z) - Zf(Z) = 0$ .  $\text{Ai}$  et  $\text{Bi}$  sont appelées respectivement les fonctions d'Airy de première et de seconde espèce. Qu'est-ce qui fixe les valeurs des constantes  $C_1$  et  $C_2$ ?

- 4. Solution pour la fonction courant.** On introduit enfin la fonction courant  $\psi = \psi_0 + \psi_1(z)e^{ikx+\omega t}$  telle que  $u = \partial_z\psi$  et  $v = -\partial_x\psi$ . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $\psi_1$ ? Vérifier qu'une solution particulière de cette équation est donnée par :

$$2k\psi_1(z) = e^{-kz} \int_0^z \Omega_1(z')e^{kz'} dz' - e^{kz} \int_0^z \Omega_1(z')e^{-kz'} dz'. \quad (8)$$

En déduire l'expression de  $\psi_1$  en fonction de  $\Omega_1$  et de deux nouvelles constantes  $C_3$  et  $C_4$ .

## 5. Relation de dispersion

**5.1** Pour pouvoir utiliser les résultats de la partie II dans le cas perturbé, on introduit le nombre de Shields local  $\Theta(x, t) = \Theta_0 + \Theta_1 e^{ikx+\omega t}$ . Exprimer la contrainte de cisaillement à la surface des grains en fonction de  $d^2\psi_1/dz^2(z=0)$  et des autres paramètres du problème. En déduire l'expression de  $\Theta_1$ .

**5.2** On considère que le flux de grains s'adapte instantanément aux changements de vitesse du fluide de sorte qu'on peut remplacer  $q_{eq}$  par  $q(x, t)$  dans l'équation (2). En écrivant à nouveau  $q(x, t) = q_0 + q_1 e^{ikx+\omega t}$ , exprimer  $q_1$  en fonction de  $\Theta_1$  et des autres paramètres du problème.

**5.3** Gr ce à l'équation (3), écrire la relation de dispersion en fonction de  $q_1/h_1$ . Retrouver alors les résultats qualitatifs de I.2.

**5.4** On note  $l_v = \sqrt{\eta/\rho\dot{\gamma}}$ . Comment cette longueur s'interprète-t-elle simplement? La résolution complète pour  $\psi_1$  montre que :

$$\beta \ll 1 \Rightarrow \frac{d^2\psi_1}{dz^2}(z=0) \simeq 1.06 e^{i\pi/6} \beta^{1/3} \frac{h_1\dot{\gamma}}{l_v}, \quad (9)$$

$$\beta \gg 1 \Rightarrow \frac{d^2\psi_1}{dz^2}(z=0) \simeq \left(2\beta + \frac{i}{2\beta}\right) \frac{h_1\dot{\gamma}}{l_v}. \quad (10)$$

En déduire la relation de dispersion approchée dans ces deux limites et montrer que la perturbation est instable aux petites comme aux grandes longueurs d'onde.

**5.5** La figure 3(a) présente les résultats du calcul analytique pour  $\Theta_0/\Theta_c = 1.1$  et  $d = 100 \mu\text{m}$ . Identifier les courbes correspondant à la partie réelle et à la partie imaginaire de  $\omega$  et retrouver les deux limites discutées ci-dessus. L'hypothèse quasi-stationnaire est-elle justifiée? Quelles sont les perturbations les plus instables? Est-ce réaliste? Quels mécanismes stabilisateurs n'ont pas été pris en compte jusqu'ici?

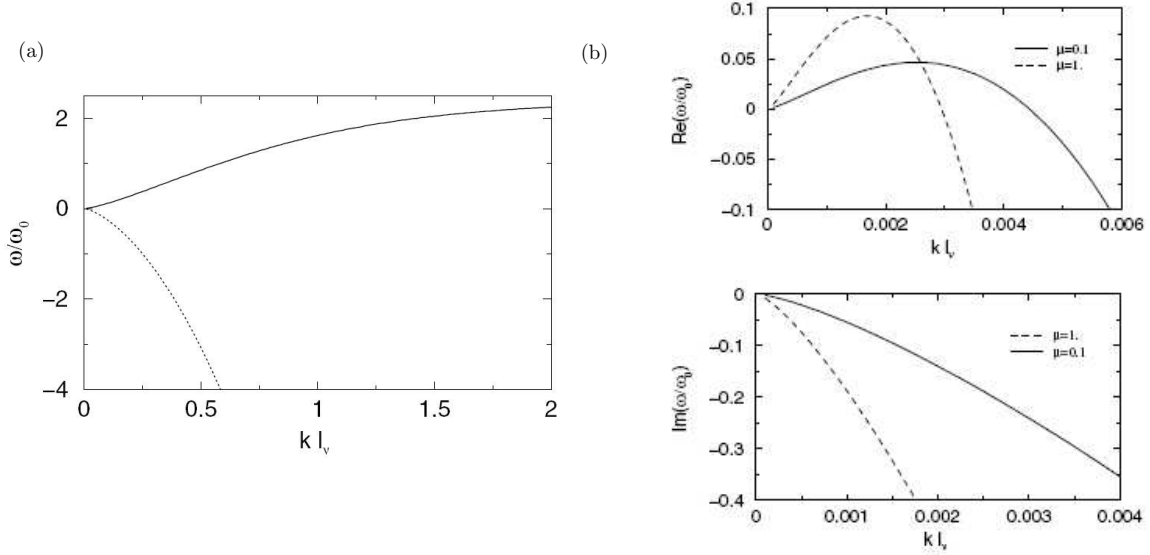


FIG. 3 – Relation de dispersion  $\omega/\omega_0$  en fonction de  $kl_v$ . On note  $\omega_0 = nq_b\Theta_c^n/d^2$  et  $\mu = (\Theta_0 - \Theta_c)/\Theta_c$ . (a) Cas sans inertie pour  $\mu = 0.1$ . (b) Cas avec inertie pour deux valeurs différentes de  $\mu$ . Figure extraite de A. Valance & V. Langlois, “Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow,” *Eur. Phys. J. B* **43**, 283–294 (2005).

**6. Effet de l’inertie des grains.** À cause de l’inertie des grains, le flux ne s’adapte pas instantanément à la vitesse du fluide. Au contraire, il faut un certain temps pour que la vitesse des grains s’adapte. Pour prendre en compte simplement cet effet, on écrit habituellement :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{q - q_{eq}}{l_{eq}}, \quad (11)$$

où  $l_{eq}$  est une longueur caractéristique de la mise à l’équilibre.

Comment la relation de dispersion trouvée en 5.3 est-elle modifiée? Montrer que l’inertie des grains a tendance à stabiliser les petites longueurs d’onde et commenter les résultats présentés sur la figure 3(b). Comparer l’ordre de grandeur prévu pour la longueur d’onde la plus instable aux observations expérimentales.