Stratégies et construction

Sébastien MARTINEAU

Été 2008

Exercice 1 (Niveau 2). Sur une règle d'1 mètre de long se trouvent 2008 fourmis. Chacune part initialement, soit vers la gauche, soit vers la droite, à une vitesse de 1 m/min. Quand deux fourmis se croisent, elles changent de sens. Quel est le plus petit temps au bout duquel on est sûr que toutes les fourmis ont quitté la règle ?

Exercice 2 (Niveau 2-3). On a 12 boules, une d'elles exactement ayant un poids différent de celui des autres. En trois pesées [1], déterminer laquelle, et si elle est plus lourde ou plus légère.

Exercice 3 (Niveau 2-3). A l'aéroport, 500 personnes font la queue pour entrer dans un avion de 500 places. Elles entrent par numéro de place croissant. (C'est beau le réalisme mathématique. . .) Le premier, ne l'ayant pas remarqué, choisit une place au hasard. Par la suite, un voyageur prend sa place si elle est libre. Sinon, il choisit une place libre au hasard. Quelle est la probabilité que le 500$^{\text{ème}}$ voyageur soit à sa place ?

Exercice 4 (niveau 2-3). Existe-t-il un ensemble A d'entiers tel que pour tout ensemble E infini de nombres premiers, il existe un entier k tel qu'il existe deux entiers qui sont des produits d'exactement k éléments distincts de E tels que l'un soit dans A et l'autre pas ?

Exercice 5 (Niveau 3). On a un damier de côté 99. Il y a une mouche sur chaque case. En une étape, chaque mouche doit se déplacer d'exactement une case, en diagonale (plusieurs mouches peuvent alors se retrouver sur une même case).

Après une étape, quel est le nombre minimal de cases libres ? Après 999 étapes ? Quelle propriété du nombre 99 vous a été utile ? Et pour 999 ?

Exercice 6 (Niveau 5). Dans une prison se trouvent 100 matheux. Ils ont connaissance de l'énoncé que vous lisez avant de passer au "Jeu". Ils doivent mettre au point une "bonne stratégie", en un sens précisé ultérieurement.

Jeu : Le meneur de jeu attribue en secret à chaque matheux un numéro, choisi aléatoirement entre 1 et 100, de telle manière que tous les matheux aient un numéro différent. Chaque matheux ne connaît initialement le numéro de personne (pas même le sien). Les matheux sont isolés, chacun étant placé dans

1. On définit une pesée ainsi : on choisit deux ensembles de boules disjoints. La balance dit alors si les deux ont même poids. Dans le cas d'une réponse négative, elle dit quel ensemble est le plus lourd.

une salle avec un ordinateur. Quand un matheux rentre un numéro, l'ordinateur renvoie le nom correspondant. Chaque matheux a 50 essais, son but étant que son ordinateur renvoie son nom. Les matheux sont libres si et seulement si chaque matheux a retrouvé son nom en moins de 50 étapes.

Comment avoir plus de 30% de chance d'être libéré ?

Les exercices 1, 3, 5 et 6 sont corrigés dans les pages qui suivent.

Correction de l'exercice 1. La réponse est 1 minute.

En effet, si toutes les fourmis partent toutes dans le même sens et que l'une d'elle est sur la bonne extrêmité de la règle, on sera obligé d'attendre 1 minute avant que toutes les fourmis aient quitté la règle.

Mais, il suffit aussi d'attendre 1 minute ! En effet, à chaque fois que deux fourmis se croisent, on peut imaginer qu'elles échangent leurs noms, si bien qu'on peut considérer que les fourmis se traversent. Or, dans ce cas, on voit que la solution est 1 minute, ce qui résout ce problème.

A retenir : Essayer d'avoir un point de vue sur les objets où on ne retient *que certaines propriétés intéressantes* et ne pas avoir peur d'analyser la situation dans sa *globalité*. Ici, on serait bien en peine de déterminer la trajectoire d'une seule des fourmis. Mais on peut trouver "facilement" des informations plus faibles, même si elles concernent toutes les fourmis. □

Correction de l'exercice 3. On va montrer par récurrence forte [2] sur le nombre de places de l'avion que la réponse est $1/2$ (on remplace alors toutes les occurences de 500 par la taille de l'avion).

Pour un avion à deux places, la réponse est bien $1/2$. Passons donc à l'hérédité. On suppose le résultat vrai pour les avions de taille entre 2 et $n \geq 2$. Prouvons-le pour un avion de taille $n+1$. Le premier voyageur choisit sa place au hasard.

Si la place choisie est la sienne, tout le monde sera à sa place.

Si la place choisie est la dernière, on est sûr que le dernier voyageur ne sera pas à sa place.

Enfin, si le premier voyageur choisit une place i telle que $1 < i < n+1$, les i-1 premiers voyageurs s'assoient à leur place. Le $i^{\text{ème}}$ choisit au hasard sa place parmi les $n+1-i$ dernières places et la première. On remarque qu'on peut voir l'ensemble de ces sièges comme un avion de taille $n+2-i$. Comme $2 \leq n+2-i \leq n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et on en déduit que la probabilité que le dernier siège soit occupé par le dernier passager est $1/2$ si on sait que le premier voyageur est à la place i.

Ainsi, la probabilité que le dernier voyageur soit à sa place dans un avion de taille $n+1$ est

$$\frac{1}{n+1} + \frac{0}{n+1} + (n-1)\frac{1/2}{n+1} = 1/2$$

On a donc l'hérédité et on conclut par récurrence forte. □

Correction parachutée de l'exercice 5. Traitons d'abord le cas d'une seule étape.

1 étape : Le nombre minimal de cases libres est 99.

Dans ce paragraphe, on va voir comment laisser au plus 99 cases libres. Parmi les diagonales de direction Sud-Est, 99 ont un nombre impair de cases. Sur chaque diagonale ainsi dirigée, on regroupe les mouches par groupes de 2 voisines. Il reste au plus une mouche seule (dans le cas d'une longueur impaire). Les voisines peuvement échanger leurs places. On laisse les mouches "célibataires" aller où elles les veulent. Les seules mouches qui peuvent laisser

2. Une preuve par récurrence forte suit le même plan qu'une preuve par récurrence sauf que l'hérédité se prouve en supposant le résultat pour tous les $k \leq n$.

leur place vacante sont les mouches "célibataires" qui sont au nombre de 99 (une par diagonale de longueur impaire). On sait donc que le nombre recherché est au plus 99.

Il ne peut y avoir moins de 99 cases libres. En effet, numérotons les colonnes de 1 à 99 et imaginons que les colonnes paires sont bleues et les autres rouges. On dit qu'une mouche est d'une couleur si elle est initialement sur une colonne de cette couleur. Comme un déplacement envoie chaque mouche sur une case d'une autre couleur, les seules mouches qui vont pouvoir essayer de recouvrir les 50×99 cases rouges sont les 49×99 mouches bleues. Il y aura donc forcément $99 \times (50 - 49) = 99$ cases rouges libres.

On a utilisé l'imparité de 99 et $99 \geq 3$ (pour pouvoir faire nos mouvements). Si vous n'en êtes pas convaincu, je vous conseille vivement de refaire la preuve vous-mêmes.

999 étapes : Le nombre minimal est toujours 99.

On peut laisser au plus 99 cases libres. En effet, en 2 étapes, on peut redonner au damier sa configuration d'origine. On peut donc faire de même en 499×2 étapes. Il ne reste plus qu'à utiliser le cas où on n'a qu'une seule étape pour conclure.

Le deuxième paragraphe est toujours valable car 999 est impair.

La seule propriété utile de 999 est son imparité. $\square$

Correction parachutée de l'exercice 6. On considère la stratégie suivante :

Stratégie. *Les matheux se numérotent de 1 à 100. Chaque matheux commence par choisir son numéro. Il choisit ensuite le numéro du matheux dont le nom vient d'apparaître. Il itère jusqu'à ce qu'il tombe sur son numéro.*

Le raisonnement qui va suivre peut être mené sans introduire de nouvelles notions, mais j'aurais l'impression de cacher quelque chose si je ne les introduisais pas. Une fonction f est dite *bijective* si chaque élément a de son ensemble d'arrivée a un unique antécédent par la fonction, i.e. il existe un unique élément d de l'ensemble de départ tel que $f(d) = a$. On définit une *permutation* σ de l'ensemble $\mathcal{E} := \{1; \ldots ; 100\}$ comme une application (ou fonction) *bijective* de $\mathcal{E}$ vers lui-même. L'*orbite* d'un élément e de $\mathcal{E}$ par σ est l'ensemble des itérés par σ de e, c'est-à-dire $\{e; \sigma(e); \sigma(\sigma(e)); \ldots\}$. Un *cycle* de taille i est une permutation de $\mathcal{E}_i := \{1; \ldots ; i\}$ telle que tout point de $\mathcal{E}_i$ ait $\mathcal{E}_i$ pour orbite.

On considère ici σ qui à n associe le numéro du matheux dont le nom est renvoyé quand on entre n dans l'ordinateur. La fonction σ est une permutation. On considère un matheux, qu'on appelera Xavier. On veut estimer le nombre d'essais qu'il faut à Xavier pour gagner.

On laisse les deux lemmes suivants en exercice (demandez de l'aide à un Animatheur s'ils vous posent problème).

Lemme. *Le nombre d'essais qu'il faut à Xavier pour gagner est la taille de l'orbite qui lui est associé.*

Lemme. *Deux éléments de $\mathcal{E}$ ont des orbites soit égales, soit disjointes.*

D'après le premier lemme, il suffit de prouver que le nombre N de permutations ayant une orbite de taille strictement plus grande que 50 est plus petit que $\frac{70}{100} \times$ nombre de permutations de $\mathcal{E}$.

$$N = \sum_{i=51}^{100} \underbrace{\text{nombre de permutations ayant une orbite de taille } i}_{\text{noté } N_i}$$

Comme $i > \frac{100}{2}$ et par le second lemme, la donnée d'une permutation ayant une orbite de taille i revient à la donnée d'un cycle de taille i, d'un ensemble de taille i et d'une permutation de $\mathcal{E}_{100-i}$.

Ainsi,

$$N_i = (i-1)! \left(\frac{100!}{i!(100-i)!} \right) (100-i)! = \frac{100!}{i}$$

Par conséquent,

$$N = \sum_{i=51}^{100} \frac{100!}{i}$$

Une calculatrice nous indique que $\frac{N}{100!}$ est plus petit que 0,7. (Essentiellement parce que $\ln(2) < 0,7$, mais on s'en fiche…) La stratégie convient donc. $\square$