Feuille 4 : Développements limités

Exercice 4.1 Par un calcul direct, trouver les trois premiers termes du développement limité en 0 pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 + \ln(1 + x + x^2), \quad g(x) = e^{\cos x}, \quad h(x) = 1 + \tan x.$$

Rq. $f \to 3 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad g \to e(1 - \frac{1}{2}x^2), \quad h \to 1 + x$

Exercice 4.2 Déterminer, par un calcul direct, les trois premiers termes non nuls du développement limité en 0 pour la fonction $x \mapsto x^2 + \arcsin x$. Pourquoi peut-on dire, sans calcul, que le prochain terme est nul ? Calculer le prochain terme non nul. (Remarque : on aura une façon plus efficace de faire ce calcul ; voir Exer. 4.9.)

Rq. $x + x^2 + \frac{1}{6}x^3$; prochain est nul car arcsin est impaire ; prochain terme non nul $= +\frac{3}{40}x^5$

Exercice 4.3 Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable x :

(a) $e^{2x} + x^3$ **(b)** $e^x \sin x$ **(c)** $(\sin x + x)^{17} x^3 + 1 + 3x^2$

Exercice 4.4

(a) Calculer les quatre premiers termes du développement limité de la fonction $x \mapsto \sin x$ au point $\pi/4$.

(b) En déduire les quatre termes suivants.

(c) Quel est son vingt-deuxième terme ?

Rq. cycle de 4 valeurs $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 \implies$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{x - \pi/4}{1!} - \frac{(x - \pi/4)^2}{2!} - \frac{(x - \pi/4)^3}{3!} + \frac{(x - \pi/4)^4}{4!} + \frac{(x - \pi/4)^5}{5!} - \frac{(x - \pi/4)^6}{6!} - \frac{(x - \pi/4)^7}{7!} \dots\right]$$

Exercice 4.5 On s'intéresse au DL (développement limité) d'ordre 3 en $a = 0$ des fonctions f et g définies par les règles

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = e^{2x}.$$

1. Trouver le DL d'ordre 3 en $a = 0$ pour chacune de ces fonctions, en justifiant leur existence.

2. En déduire les DL d'ordre 3 en $a = 0$ pour les fonctions f^2, fg, et f^4.
3. En déduire les DL d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $g \circ f$.
4. Déterminer le DL d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $f \circ g$ (attention : piège).

Rq. On utilise les résultats du cours sur les produits et les composés $x^3 - x, 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$

Exercice 4.6 Trouver le DL d'ordre 4 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable x :

(a) $\ln(1+x)\sin x$ **(b)** $\ln(1+\sin x)$ **(c)** $\sin(\ln(1+x))$ **(d)** $\dfrac{\sin x}{1+\ln(1+x)}$

Exercice 4.7 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$x \mapsto f(x) := \dfrac{e^x}{\cos x}$, en justifiant son existence.

Rq. $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

Exercice 4.8 Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions :

(a) $(1-x)^3$ **(b)** $\dfrac{e^x}{(1+x)^3}$ **(c)** $\sqrt{-x^2+3x+1}$ **(d)** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$

Rq. (a) $1 - 3x + 3x^2 - x^3 + o(x^3)$

(b) $1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)$

(c) $1 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{16}x^3 + o(x^3)$

(d) $1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$

Exercice 4.9

(a) Calculer le DL en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ à l'ordre 3.

(b) En déduire le DL d'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$.

(c) En déduire le DL d'ordre 7 en 0 de la fonction $x \mapsto \arcsin x$. Comparer avec le calcul direct de l'Exer. 4.2.

Rq. (a) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$

(b) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6)$

(c) $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$

Exercice 4.10 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sin(x^2), n = 13$ **(b)** $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}, n = 12$ **(c)** $h(x) = \arctan\left(x^2\right), n = 13$

Exercice 4.11 On s'intéresse aux DL de certaines fonctions à l'origine.

(a) Calculer les DL d'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \ln(x+3)$ et $x \mapsto \ln(x+2)$.

(b) En déduire le DL d'ordre 3 de la fonction $g(x) := 3\ln(x+3) - 2\ln(x+2)$.

(c) Montrer que, lorsque cela a un sens,

$$g'(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}.$$

Utiliser ce résultat, avec la partie (b), pour trouver le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{x^2+5x+6}.$$

(d) Calculer directement le DL d'ordre 2 en 0 de f par la division euclidienne.

Exercice 4.12 On observe que la fonction f définie par la règle $f(x) = \dfrac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - x}$ est de forme indéterminée en 0.

(a) Prouver que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, et calculer cette limite.

(b) Prouver ensuite, si on appelle encore f le prolongement par continuité de la fonction définie plus haut, la fonction f admet un développement limité à l'ordre un autour de 0, et le déterminer. (Rép : $-2-x+o(x)$)

(c) Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$. (Rép : -1)

Rq.

$$\frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - x}:$$

$$\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^3/6+o(x^3) - \left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) - x}{\ln\left(1+(x-x^3/6+o(x^3))\right) - x} = \frac{x^2+x^3/6+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+x^3/6+o(x^3)-x}$$

$$= \frac{x^2\left(1+x/6+o(x)\right)}{x^2\left(-\frac{1}{2}+x/6+o(x)\right)} = \frac{(1+x/6+o(x))}{(-\frac{1}{2}+x/6+o(x))} = -2\,\frac{1+x/6+o(x)}{1-x/3+o(x)}$$

$$= -2\left(1+x/6+o(x)\right)\{1+x/3+o(x)\} = -2-x+o(x)$$

Rq. NOTE : $o(1)$ veut dire simplement un terme qui tend vers 0 (lorsque x tend vers le a en question). En fait, l'Hospital marche ici, aussi.

Exercice 4.13

(a) Déterminer le développement limité en 0 et d'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$\textbf{(i)}\ \frac{x}{1+x} \qquad \textbf{(ii)}\ \sin\frac{x}{1+x} \qquad \textbf{(iii)}\ \frac{\sin x}{1+\sin x}.$$

(b) Utiliser ces développements limités afin de calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1+x} - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right).$$

Aurait-on pu calculer cette limite par la règle de l'Hôpital ? (Rép : $1/6$)

Rq. (i) $x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)$

(ii) $x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

(iii) $x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

Exercice 4.14 Il s'avère que la fonction $f(x) := \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ admet une limite lorsque x tend vers 0 : la trouver. (Rép : $-1/6$)

Exercice 4.15 Il s'agit d'étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)} \quad (x \neq 0)$$

autour de 0. Montrer que $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$.

Rq. On trouve

$$f/g = \frac{3x - 27x^3/6 + o(x^4)}{2x^2 + 8x^4/3 + o(x^5)} \approx 3/(2x),$$

pas de limite, l'Hospital ne donne rien.

Exercice 4.16 Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

(a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0, et calculer sa limite en 0.

(b) Lorsque la fonction f est prolongée en 0 par continuité, montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 dans un voisinage de 0, et déterminer celui-ci.
$\big($Rép : $e - (e/2)x + (11e/24)x^2 + o(x^2)\big)$

Rq. On a $f(0) = e \neq 0$; on calcule

$$e^{\ln f - 1} = 1 + [-h/2 + h^2/3 + o(h^2)] + \frac{1}{2}[-h/2 + h^2/3 + o(h^2)]^2 + o([-h/2 + h^2/3 + o(h^2)]^3)$$

$$\Longrightarrow f(x) = e\left\{1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + o(x^2)\right\}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 4.17 Soit f la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{[\ln(1+x)]^4}{\arctan(x^3 \sin x)}$. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$. (Rép : 1)

Rq.

$$\begin{aligned}\frac{[\ln(1+x)]^4}{\arctan(x^3\sin x)} &= \frac{[x-x^2/2+o(x^2)]^4}{x^3\sin x+o(x^3\sin x)}\\ &= \frac{x^4[1-x/2+o(x)]^4}{x^3[x+o(x^2)+o(\sin x)]}\\ &= \frac{1-x/2+o(x)}{1+o(x)} \to 1.\end{aligned}$$

Exercice 4.18 Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction $f(x) = \arccos\left(x^2\right)$. [Indication : étudier f'] $\left(\text{Rép : } \pi/2 - x^2 - x^6/6 + o(x^6)\right)$

Exercice 4.19 Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $t \mapsto f(t) := (1-t+t^2)^{1/t}$.

(a) Montrer que f admet une limite en $t = 0$.

(b) Lorsque $f(0)$ est ainsi prolongée par continuité, montrer que f admet un développement limité en 0 d'ordre 2, et le calculer.

$\left(\text{Rép : } e^{-1}[1+t/2+19t^2/24] + o(t^2)\right)$