Feuille 4 : Développements limités

Exercice 4.1 Par un calcul direct, trouver les trois premiers termes du développement limité en 0 pour chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 + \ln(1 + x + x^2), \quad g(x) = e^{\cos x}, \quad h(x) = 1 + \tan x.$$

Exercice 4.2 Déterminer, par un calcul direct, les trois premiers termes non nuls du développement limité en 0 pour la fonction $x \mapsto x^2 + \arcsin x$. Pourquoi peut-on dire, sans calcul, que le prochain terme est nul ? Calculer le prochain terme non nul. (Remarque : on aura une façon plus efficace de faire ce calcul ; voir Exer. 4.9.)

Exercice 4.3 Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable x :

(a) $e^{2x} + x^3$ **(b)** $e^x \sin x$ **(c)** $(\sin x + x)^{17} x^3 + 1 + 3x^2$

Exercice 4.4

(a) Calculer les quatre premiers termes du développement limité de la fonction $x \mapsto \sin x$ au point $\pi/4$.

(b) En déduire les quatre termes suivants.

(c) Quel est son vingt-deuxième terme ?

Exercice 4.5 On s'intéresse au DL (développement limité) d'ordre 3 en $a = 0$ des fonctions f et g définies par les règles

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = e^{2x}.$$

1. Trouver le DL d'ordre 3 en $a = 0$ pour chacune de ces fonctions, en justifiant leur existence.
2. En déduire les DL d'ordre 3 en $a = 0$ pour les fonctions f^2, fg, et f^4.
3. En déduire les DL d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $g \circ f$.
4. Déterminer le DL d'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $f \circ g$ (attention : piège).

Exercice 4.6 Trouver le DL d'ordre 4 en 0 pour chacune de ces fonctions d'une variable x :

(a) $\ln(1+x)\sin x$ **(b)** $\ln(1 + \sin x)$ **(c)** $\sin(\ln(1+x))$ **(d)** $\dfrac{\sin x}{1 + \ln(1+x)}$

Exercice 4.7 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$x \mapsto f(x) := \dfrac{e^x}{\cos x}$, en justifiant son existence.

Exercice 4.8 Trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 pour chacune de ces fonctions :

(a) $(1-x)^3$ **(b)** $\dfrac{e^x}{(1+x)^3}$ **(c)** $\sqrt{-x^2 + 3x + 1}$ **(d)** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$

Exercice 4.9

(a) Calculer le DL en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ à l'ordre 3.

(b) En déduire le DL d'ordre 6 en 0 de la fonction $x \mapsto (1-x^2)^{-1/2}$.

(c) En déduire le DL d'ordre 7 en 0 de la fonction $x \mapsto \arcsin x$. Comparer avec le calcul direct de l'Exer. 4.2.

Exercice 4.10 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sin(x^2)$, $n = 13$ **(b)** $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$, $n = 12$ **(c)** $h(x) = \arctan\left(x^2\right)$, $n = 13$

Exercice 4.11 On s'intéresse aux DL de certaines fonctions à l'origine.

(a) Calculer les DL d'ordre 3 des fonctions $x \mapsto \ln(x+3)$ et $x \mapsto \ln(x+2)$.

(b) En déduire le DL d'ordre 3 de la fonction $g(x) := 3\ln(x+3) - 2\ln(x+2)$.

(c) Montrer que, lorsque cela a un sens,

$$g'(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}.$$

Utiliser ce résultat, avec la partie (b), pour trouver le DL d'ordre 2 en 0 de la fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{x^2+5x+6}.$$

(d) Calculer directement le DL d'ordre 2 en 0 de f par la division euclidienne.

Exercice 4.12 On observe que la fonction f définie par la règle $f(x) = \dfrac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - x}$ est de forme indéterminée en 0.

(a) Prouver que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, et calculer cette limite.

(b) Prouver ensuite, si on appelle encore f le prolongement par continuité de la fonction définie plus haut, la fonction f admet un développement limité à l'ordre un autour de 0, et le déterminer. (Rép : $-2 - x + o(x)$)

(c) Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$. (Rép : -1)

Exercice 4.13

(a) Déterminer le développement limité en 0 et d'ordre 4 des fonctions suivantes :

$$\textbf{(i)} \quad \frac{x}{1+x} \qquad \textbf{(ii)} \quad \sin\frac{x}{1+x} \qquad \textbf{(iii)} \quad \frac{\sin x}{1+\sin x}.$$

(b) Utiliser ces développements limités afin de calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1+x} - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right).$$

Aurait-on pu calculer cette limite par la règle de l'Hôpital ? (Rép : $1/6$)

Exercice 4.14 Il s'avère que la fonction $f(x) := \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ admet une limite lorsque x tend vers 0 : la trouver. (Rép : $-1/6$)

Exercice 4.15 Il s'agit d'étudier le comportement de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)} \quad (x \neq 0)$$

autour de 0. Montrer que $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$.

Exercice 4.16 Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

(a) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0, et calculer sa limite en 0.

(b) Lorsque la fonction f est prolongée en 0 par continuité, montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 dans un voisinage de 0, et déterminer celui-ci.
$\big($Rép : $e-(e/2)x+(11e/24)x^2+o(x^2)\big)$

Exercices supplémentaires

Exercice 4.17 Soit f la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{[\ln(1+x)]^4}{\arctan(x^3\sin x)}$. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$. (Rép : 1)

Exercice 4.18 Déterminer le développement limité à l'ordre 6, au voisinage de 0, de la fonction $f(x) = \arccos\big(x^2\big)$. [Indication : étudier f'] $\big($Rép : $\pi/2 - x^2 - x^6/6 + o(x^6)\big)$

Exercice 4.19 Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $t \mapsto f(t) := (1-t+t^2)^{1/t}$.

(a) Montrer que f admet une limite en $t = 0$.

(b) Lorsque $f(0)$ est ainsi prolongée par continuité, montrer que f admet un développement limité en 0 d'ordre 2, et le calculer.

$\big($Rép : $e^{-1}[1+t/2+19t^2/24]+o(t^2)\big)$