Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des Mathématiques II
Semestre de printemps 2017–2018

Feuille 8 : Intégrales de Riemann

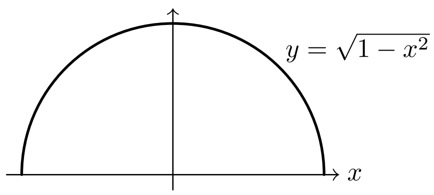
1 Calcul d'aires

Exercice 1. Considérons

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que si l'on pose $\theta = \arccos(x)$, alors $(x, f(x)) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
3. En déduire $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

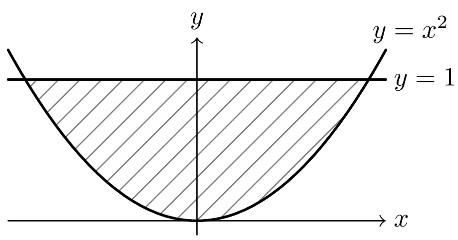
Correction. 1.



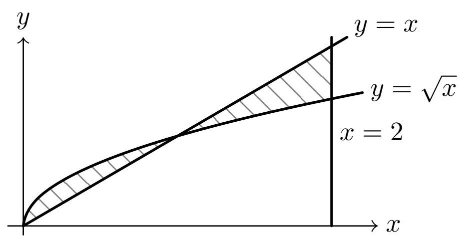
2. $x \in [-1,1]$, et donc $x = \cos(\arccos(x)) = \cos\theta$. Mais alors $f(x) = \sqrt{1-\cos^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$, puisque $\theta \in [0,\pi]$.
3. D'après la question précédente, le graphe de f décrit exactement un demi-cercle de centre 0 et de rayon 1. On en déduit que $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/2$.

Exercice 2. Déterminer l'aire des domaine hachurés représentés ci-dessous.

1.



2.



Correction. 1. Les courbes d'équation $y = 1$ et $y = x^2$ se croisent en les points $(-1,1)$ et $(1,1)$. Ainsi, l'aire du domaine, que l'on note A, est donnée par

$$A = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

2. Cette fois-ci, on intègre entre 0 et 2, mais il faut faire attention, car les courbes se croisent, et il faut donc séparer l'intégrale en deux morceaux. Ainsi, l'aire est

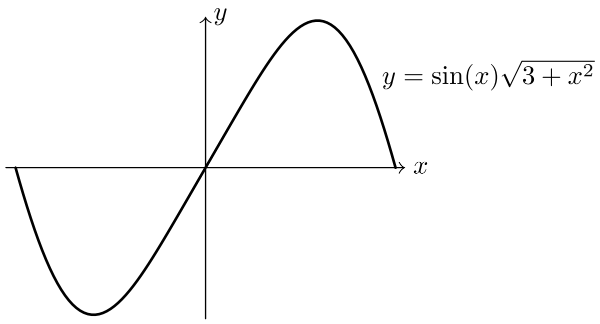
$$\begin{aligned} A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}(7 - 4\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer sans aucun calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\sqrt{3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra s'aider d'un dessin.

Correction. La fonction $x \mapsto \sin(x)\sqrt{3 + x^2}$ est impaire, et donc son graphe présente une symétrie centrale par rapport à l'origine. Ainsi, l'aire algébrique sous son graphe sur le segment $[-\pi, 0]$ est exactement l'opposé de l'aire sous son graphe sur le segment $[0, \pi]$, ce qui montre bien que son intégrale sur la réunion de ses segments est nulle.



Exercice 4. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2.$$

2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[0, 1]$ par

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

   et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions f, u_n et v_n. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{n}.$$

(b) En faisant tendre n vers $+\infty$, en conclure que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$

3. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.
4. Répéter les questions 2. et 3. avec, à la place de la fonction f, la fonction

$$g : x \mapsto x^2.$$

Correction. 1. Le graphe de $x \mapsto x$ sur $[0,1]$ définit un triangle de base 1 et de hauteur 1, dont l'aire est l'intégrale de cette fonction, qui est donc égale à 1/2.

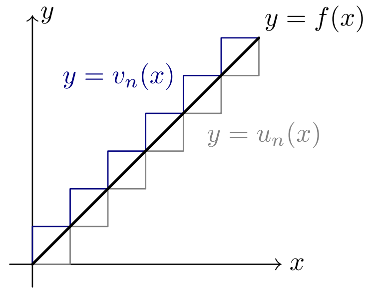
2. (a) On remarque que u_n et v_n vérifient $u_n(x) \leqslant f(x) \leqslant v_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\int_0^1 u_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 v_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

et donc, par définition de l'intégrale pour les fonctions en escalier,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

d'où l'inégalité voulue.



(b) En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, on trouve que

$$\frac{n+1}{2n} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n}.$$

Ce résultat étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on retrouve que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$ en faisant tendre n vers $+\infty$.

3. f est continue, et $F : x \mapsto x^2/2$ est une primitive de f. Ainsi, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}.$$

4. On procède à la même étude avec $g(x) = x^2$. Cette fois,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

donne

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2,$$

d'où

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6n^3} - \frac{1}{n^3}$$

d'où, par passage à la limite, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1/3$. La fonction $G(x) = x^3/3$ est une primitive de g, et utiliser le théorème fondamental de l'analyse amène au même résultat.

2 Sommes de Riemann

On rappelle le résultat suivant (dont on verra une preuve pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'exercice 12) : si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5. En utilisant ce résultat, calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$,
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}$,
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$.

Correction. 1. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable au sens de Riemann, et donc

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2).$$

2. À nouveau, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue, donc

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

3. Même argument pour montrer que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6. Déterminer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

Indication : on pourra étudier la suite $(\ln(u_n))$.

Correction. On s'intéresse à la suite $v_n = \ln u_n$.

$$\begin{aligned} v_n = \ln u_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right) &= \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln(x) - x]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - 1, \end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4/e$.

Exercice 7. On cherche à déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Commençons par étudier la suite

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

   Montrer que la suite (v_n) converge vers une limite à préciser. On pourra utiliser le fait que $x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$ est une primitive de $x \mapsto x\sin(x)$.
2. Montrer que l'inégalité $x - x^3/6 \leqslant \sin(x) \leqslant x$ est vérifiée pour tout $x \geqslant 0$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{6n^2}.$$

4. Conclure : établir que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sin(1) - \cos(1)$.

Correction. 1. $x \mapsto x\sin(x)$ est continue, et donc

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [\sin(x) - x\cos(x)]_0^1 \\ &= \sin(1) - \cos(1). \end{aligned}$$

2. Considérons $f : x \mapsto \sin(x) - x + x^3/6$. En remarquant que $f^{(3)}(x) = -\cos(x) + 1 \geqslant 0$, on montre que f'' est croissante. Alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f''(x) = -\sin(x) + x \geqslant f''(0) = 0$. On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant f'(0) = 0$, et finalement que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$. On a bien montré les deux inégalités demandées.
3. L'inégalité de la question précédente implique que pour tout $x \geqslant 0$, on a $|\sin(x) - x| \leqslant x^3/6$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in \{1, \dots, n\}$. On trouve que

$$\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right| \leqslant \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \frac{1}{6n^3}.$$

   Il vient alors, en sommant sur k,

$$|u_n - v_n| \leqslant n\frac{1}{6n^3}.$$

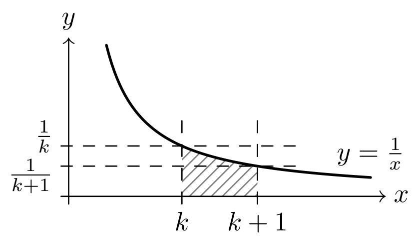
4. On a montré que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \sin(1) - \cos(1)$, et aussi que $\lim_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$, ce qui prouve bien que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sin(1) - \cos(1)$.

3 Applications

Exercice 8 (Comparaison série-intégrale)**.** On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k},$$
par exemple avec un dessin, en graphant la fonction $x \mapsto 1/x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Que peut-on en conclure sur $\lim_{n\to+\infty} u_n$?

Correction. 1. La fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, et donc, si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [k, k+1]$,
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$
Il suffit d'intégrer cette inégalité sur l'intervalle $[k, k+1]$ pour obtenir l'inégalité désirée. On peut aussi le voir graphiquement :



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité précédente pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient
$$u_{n+1} - 1 = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n,$$
d'où, d'une part, $u_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, et d'autre part, $u_{n+1} \leqslant 1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, ce qui répond à la question.
3. On a en particulier $u_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1)$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On peut même aller un peu plus loin, et utiliser les deux inégalités pour montrer que $u_n \sim \ln(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.

Correction. Notons déjà, comme $f \geqslant 0$, que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Prouvons alors la contraposée. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Alors, par continuité, il existe un réel ε tel que $b - a > \varepsilon > 0$, et, pour tout $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [a,b]$, $f(x) \geqslant f(x_0)/2$. Il vient donc, par croissance de l'intégrale, que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\cap[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon\frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

En prenant la contreposée, on en déduit donc que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies (\forall x\,[a,b]\,,\, f(x) = 0)$.

Exercice 10. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Correction. f est continue sur un intervalle fermé, elle est donc bornée (et atteint ses bornes). Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on a $|f(x)| \leqslant M$, et donc

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 x^n |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = M\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1},$$

d'où le résultat.

4 Un peu de théorie

Exercice 11 (Une fonction non intégrable)**.** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Soit g une fonction en escalier telle que $g \geqslant f$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geqslant 1$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
2. De la même manière, montrer que si h est une fonction en escalier $\leqslant f$, alors $h \leqslant 0$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
3. En déduire que

$$\inf\left\{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,\ g \text{ en escalier et } g \geqslant f\right\} = 1,$$
$$\sup\left\{\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x,\ h \text{ en escalier et } h \leqslant f\right\} = 0.$$

4. Conclure.

Correction. 1. g étant en escalier, il existe une subdivision $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ de $[0,1]$ telle que g soit constante sur les intervalles de la forme $]a_{k-1}, a_k[$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. Alors, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe des rationnels $r_k \in]a_{k-1}, a_k[$, et, par définition de f, $g(r_k) \geqslant f(r_k) = 1$. Ainsi, g est supérieure ou égale à 1 sur les intervalles $]a_{k-1}, a_k[$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, ce qui répond à la question.

2. Le raisonnement est le même que dans la question 1., mais on utilise cette fois le fait que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Si g est une fonction en escalier $\geqslant f$, alors la question 1 implique que $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1$. On peut donc prendre la borne inférieure dans cette inégalité pour obtenir que
$$\inf\left\{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,\ g \text{ en escalier et } g \geqslant f\right\} \geqslant 1.$$
Comme de plus la fonction constante égale à 1 est en escalier et est supérieure à f, on en déduit que $\inf\left\{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,\ g \text{ en escalier et } g \geqslant f\right\} = 1$. On montre l'autre inégalité de la même manière.
4. Comme ces deux quantités sont différentes, on en conclut que f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 12 (Calcul d'erreur)**.** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est continue, donc intégrable au sens de Riemann. On pose $S = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, et pour $n \geqslant 1$,
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que
$$|S - S_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x.$$
2. Si $k \in \{1,\ldots,n\}$ et $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que
$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n},$$
où M est une constante indépendante de k et de x.
3. En déduire que $|S - S_n| \leqslant \frac{M}{n}$.

Correction. 1. La relation de Chasles permet d'écrire
$$\begin{aligned}|S - S_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$ et $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $x_0 \in \left]x, \frac{k}{n}\right[$ tel que
$$f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(x - \frac{k}{n}\right) f'(x_0).$$
Or, f' est continue sur un intervalle fermé, et y est donc bornée. Il existe $M > 0$ tel que $\forall y \in [0,1]\,, |f'(y)| \leqslant M$. Ainsi, il vient
$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|x - \frac{k}{n}\right||f'(x_0)| \leqslant M\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

3. On déduit de l'inégalité précédente que

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \mathrm{d}x \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{M}{n} \,\mathrm{d}x = \frac{M}{n^2}.$$

En sommant sur $k \in \{1, \ldots, n\}$, on en déduit que $|S - S_n| \leqslant \frac{M}{n}$. En particulier, cela montre que $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, résultat dont on se sert dans les exercices précédents.