Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE Math4
Année universitaire 2018/2019
Printemps 2019

CC2 du 22.03.2019
Durée : 60 minutes

À part la feuille distribuée, les documents ne sont pas autorisés. Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème est indicatif.

Exercice 1 [6 pts.] Soient $f, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les deux fonctions définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 > 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x^2 \leq 1 \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Tracer le graphe de f et le graphe de H. Déterminer $f \star H(x)$. Tracer le graphe de $f \star H$.

Exercice 2 [3 pts.] Soient $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$.
Déterminer $f \star g$.
Bonus [2 pts.] Soit $g(x)$ une fonction continue paire qui satisfait $g(x) = 0$ dès que $|x| \geq b$ pour une valeur réelle b et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$. Montrer que $f \star g = f$, où f est toujours la fonction définie par $f(x) = x$.

Exercice 3 [3 pts.] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Calculer la transformation de Laplace $\mathcal{L}[f]$ de f.

Exercice 4 [8 pts.] On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$ avec conditions initiales

$$f''(t) + 4f'(t) + 3f(t) = e^t \qquad f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$$

À l'aide de la transformation de Laplace, trouver la solution de cette équation.